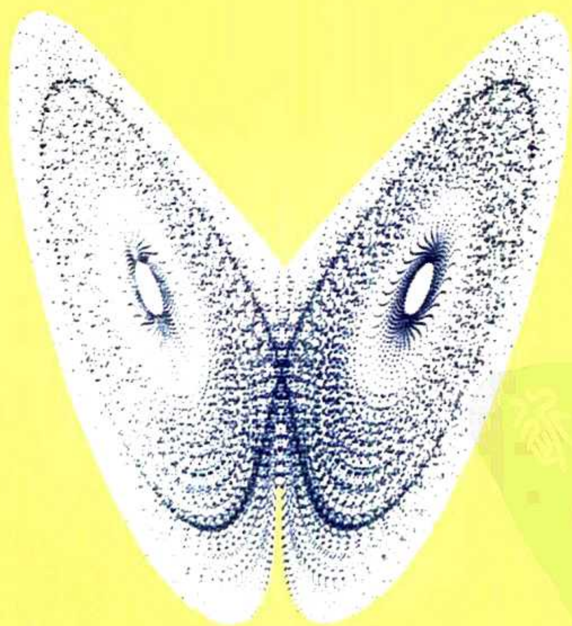
The Essence of Chaos

混沌的本质

[美] E. N. 洛伦兹 著





气象出版社

混沌的本质

［美］ E. N. 洛伦兹 著
刘式达 刘式适 严中伟 译
周秀骥 审校

著作权合同登记图字：01-96-1629号

The Essence of Chaos

E. N. Lorenz

气象出版社

内容简介

本书是当代世界知名的动力气象学家、混沌理论的少有几位开创者之一E.N.洛伦兹教授在近期为总结其开创及推动混沌科学发展过程而写的一本力作。全书共分五章，全面介绍了混沌理论的基本概念，发展历程和前景展望，既是一本很有分量的学术专著，又是一本科学散文集，哲理、文学与科学融为一体，读来引人入胜。本书可供对混沌理论及现代数学、物理学感兴趣的大专院校师生、科技人员和中等文化水平的读者阅读。

图书在版编目(CIP)数据

混沌的本质/刘式达等译. -北京：气象出版社，1997. 1

ISBN 7-5029-2249-0

I. 混 II. 刘 III. 混沌学-研究 IV. 0414. 22

中国版本图书馆 CIP 数据核字(96)第 24777 号

混沌的本质

[美] E.N.洛伦兹 著

刘式达 刘式适 严中伟 译

责任编辑：俞卫平 终审：周诗健

责任技编：黄慧靖 责任校对：黄慧靖

气象出版社出版发行

(北京海淀区白石桥路 46 号 100081)

北京怀柔新华印刷厂印刷

* * *

开本：850×1168 1/32 印张：7 字数：185 千字

1997 年 1 月第一版 1997 年 1 月第一次印刷

印数：1～2000 定价：15.00 元

ISBN 7-5029-2249-0/P・829

中译本出版者的话

“混沌”是近代非常引人注目的热点研究，它掀起了继相对论和量子力学以来基础科学的第三次大革命。科学中的混沌概念不同与古典哲学与日常语言中的理解，简单地说，混沌是一种确定的系统中出现的无规则的运动。混沌理论所研究的是非线性动力学混沌，目的是要揭示貌似随机的现象背后可能隐藏的简单规律，以求发现一大类复杂问题普遍遵循的共同规律。

麻省理工学院(MIT)的 E. N. Lorenz 教授由于他早在60年代关于混沌的开创性研究而被誉为“混沌之父”，并提出了形象的“蝴蝶效应”。Lorenz 写过很多论文，但著作很少，这是他集中了几年精力专为广大公众所写的一本高级科普读物。当他正撰写本书英文版时我国留美学者曾旭斌博士由于工作关系，与 Lorenz 接触较多，向我社推荐出版该书中译本。我社也认为这是一本难得的好书，欣然接受了这一建议。经曾博士的多方努力，我社与华盛顿大学出版社(University of Washington Press)达成了版权协议，在此我社对华盛顿大学出版社及其版权代表 J. Lind 女士致以谢意。同时也对“大气科学和地球流体力学数值模拟国家重点实验室”(LASG)所给予的部分出版资助表示感谢。

在中译本面世之际，我们要感谢本书的译者和审校者，没有他们的努力本书是难以面世的。本书第一、第二章由严中伟博士译出；第四、第五章由刘式达教授译出；第三章及附录部

分由刘式适教授译出；序言由我社郭彩丽同志译出。中国气象科学研究院名誉院长、中国科学院院士周秀骥在百忙之中担任了本书的审校工作；中国气象科学研究院史国宁研究员为中译本做了修改润色；我社俞卫平、黄慧靖两同志本着制作精品的目的，也做了大量拾遗补缺的工作。总之，没有上述诸方面的努力，本书中译本是难以达到现有水平的。

当前社会上普遍存在着科技译著出版难的现象。作为全国唯一的气象科学出版社，我社将一如既往地多出好书，将一本本优秀的国内外专著介绍给读者，以促进学术交流和科学研究。《混沌的本质》中译本的出版，就是我社在这一系列努力中最新奉献给读者的一份珍品。

气象出版社

1997年1月

序　言

1990 年春天我应华盛顿大学的邀请去发表一系列的演说，作为约 30 年前因 Jessie 和 John Danz* 的捐款和远见卓识而开创的系列演讲的一部分。演说的对象是普通的听众，我可以自选演说命题。

约 30 年前，我在天气预报的理论方面做开拓性实验时，偶然发现了一种后来被称作“混沌”的现象，这种现象表面上看是随机的，不可预报的，而事实上却是按照严格的且经常是易于表述的规则运动着。更早一些时候的研究人员偶然，只不过是在不同的情况下，也发现过这种现象，他们往往没有认识到他们所看到的东西，而只是简单地意识到有什么东西妨碍了他们求解方程组或在其它方面妨碍了他们完成研究工作。我的情形是个例外，我最终认识到除非我能建立一个其解表现为混沌的方程组，否则我的实验注定要失败。混沌至少在某些情况下突然变成了某种受欢迎的东西，在随后的若干年中，我发现我自己越来越把混沌看成是一种因它本身的原因而值得研究的现象。

---

* John Danz 先生是西雅图人。1961 年 10 月，他和他的妻子 Jessie Danz 在华盛顿大学建立了一个永久的基金会，其基金用于华盛顿大学每年向致力于自然科学和哲学研究并在国内和国际上享有声誉的杰出学者提供资金。这个由 Danz 先生和夫人建立的基金会现在称为 Jessie 和 John Danz 基金会，在该基金会的资助下去华盛顿大学的学者被称为 Jessie 和 John Danz 演讲者或教授

因此，决定这些演讲应该包括什么论题是件易事，我接受了邀请，并选择了“混沌的本质”作为论题，最终形成三个演讲。第一个演讲对混沌作了定义，并用一些简单的例子阐释了混沌的基本性质，以描述开始被称作混沌的一些相关的现象——非线性、复杂性和分维性——而结束；第二个演讲把全球天气作为一个复杂的混沌个例进行了论述；最后一个演讲介绍了当今人们日益增长的混沌意识，并提出了一个通过它人们可以设计自己的混沌系统的规定，结尾给出一些哲学思考。为符合听众的兴趣，我没有罗列数学公式，除了我定义的一些术语外，也尽量避免用专业词汇。

本书与我的演讲题目相同，也是依 Danz 演讲的脉络而写的。所涉及的内容与演讲的相同，并附加了一些内容以弥合因演讲本身受口语表达的局限而不可避免地出现的许多空白。第一个演讲经扩充变为本书的第 1、第 2 和第 5 章，第二个演讲被改编成第 3 章。因最后一个演讲以海王星的发现开头，进而介绍了 Henri Poincaré 和他的助手的工作，暂时中断了我所涉及的混沌理论的介绍，因此把它列为第 4 章。

我之所以下决心把这些演讲改写为一本书是因为尽管混沌的个别参考文献是数学的分支或某个新的学科，但我坚信混沌连同其许多相关的概念——奇异吸引子、域边界、倍周期分岔等等——能够被那些没有专门的数学或其它科学教育背景的读者很容易地理解和喜欢。与在演讲中一样，在本书中我也是用非专业的语言来讲述混沌的故事，除此之外，为避免用冗长的词组显得过分重复，我还介绍和定义了一系列的标准术语。有关的数学方程组及其推导都放在一个附录中，你不用读它就完全可以理解正文，但它可以使那些有数学专长的读

者对本书更感兴趣。

当然，在正文中除了非常专业的数学，也不可能一点数学都没有。例如：两个滑板沿着一个斜面下滑 30 米，开始时相差 10 厘米，最后相差 10 米，这一图例说明可以被看作是一种数学观察；于是，所描绘的事情的语言表达就成为一种数学陈述。总之，图例说明中用了很多较简单的数学，其中的大部分是数学推导的最终结果，接着，它们被转化成计算程序。不过，读者既不需要面对公式也不需要面对程序就能够得到说明中所包含的信息。

在本书的撰写过程中，我得到了许多人的帮助。首先我必须感谢 Danz 基金会，没有他们主办演讲，我可能永远也走不出这第一步。同样我必须感谢华盛顿大学选择我作为演讲人。我深切地感谢美国国家科学基金会大气科学部的气候动力学计划和该计划的现任领导 Jay Fein，感谢他们这许多年来支持我研究混沌及其在大气中的应用，并且，非常直接地，使我有可能为本书所举的例子写出大量的计算机程序并完成计算。我非常地感谢 Joel Sloman 为本书打字以及不仅是在最后一遍手稿还包括在数不清的中间校次中所提供的帮助，感谢 Diana Spieger 为排除计算机系统上的各种障碍所给予的一贯帮助，也感谢 Jane McNabb 代替我作了大量的管理工作。

感谢芝加哥大学的 Dave Fultz 提供了他的转盘实验的照片，并感谢他和美国气象学会慧许我复制引用。同时也感谢国家大气研究中心的 Robert Dattore 和 Wilbur Spangler 准备了足够长的磁带，其中包含新加坡的多年高空天气记录，并使之付诸应用。

这里我必须特别褒奖 Merry Caston，她逐页检查了我的全部手稿，并提出了许多中肯的意见，因此才使我在书中加入了许多进一步阐述的材料和其它一些修正意见。还有许多人，我与他们有过短暂的或有时是广泛的讨论，我所写的文字或表达的观点也受到他们的影响。在这种联系中我必须特别提到 Robert Cornett，James Curry，Robert Devaney，Alan Faller，Robert Hilborn，Philip Merilees，Tim Palmer，Bruce Street，Yoshisuke Ueda，J. Michael Wallace 和 James Yorke。还有一些人可能也对我有影响，我却没有注意到，另外还有一些没留姓名的审阅者，我只能说他们的名字都应被包括在这里，我对他们一并致谢。

最后，我非常感谢我的妻子 Jane，在本书的撰写过程中，她自始至终给予我精神上的支持，并为寻找混沌资料而陪着我一起走过无数旅途。还要感谢我的孩子 Nancy，Edward 和 Cheryl，他们分别是律师、经济学家和心理学家，他们成功地充当了聪明的外行人的角色，在他们的详细检查下，我的手稿才得以逐步完善。

Edward N. Lorenz

混沌的本质

目　　录

第一章　混沌一瞥

貌似随机

词语并不是活的东西，它们不会呼吸，不会行走，也不会彼此相爱。然而，就像它们所服务的人类一样，它们能够经历独特的生命史。语言中一个词诞生时可能只有一个含义，但在其演化过程中它还可能获得多种既相关联又相区别的新含义。这些新含义经常是老含义很自然的延伸。我们小时候都学过“热”和“冷”这两个词

的含义；而当我们长大后却发现“热烈的追求”、“冰冷的安慰”*，或者“火辣辣的拒绝”、“冷淡的接待”并非是一些可测量或估算其温度的物质或物体。在另一些例子中更新的含义则是一些专门术语。同样在童年时代，我们学过“喝”的含义；而长大后听人说“你们喝多了”时，我们会明白这绝对不是在说我们刚灌下一杯橙汁。事实上，如果当有人对别人说我们爱喝贪杯时，他大概不是想简单地说明我们好饮烈酒，而是想指出我们暴饮过度以至影响健康和行为。

“混沌”一词也是如此。这个古老的词最初表示完全缺乏具体形态或系统排列，而如今则常用来表示某种应该有的秩序却没有出现。尽管这个词十分古老，但这个大家熟悉的词并没有濒临死亡；相反，由于它近年来获得了若干既相关联又相区别的专门的含义，它的重要性已凌驾于许多其它普通词汇之上。

这一术语多年来已被众多科学家用来表示这样或那样的随机性，这并不令人惊讶。最近一个例子是诺贝尔奖获得者、物理化学家 I. Prigogine（普里高津）及其同事 I. Stengers（斯坦格）所撰写的力作《从混沌到有序》**。他们研究许多无序系统自发地获得有序结构的方式，如无定形的液体如何在冷却时固化形成精致的晶体。一两代人以前，数学家 N. Wiener（维纳）有时甚至会用这个单词的复数形式，来强调说明诸如一群随机分布的气体分子或云中杂乱无章的水滴群这样的系统。

这种用法仍在延续。但自 70 年代中期以来，这一术语已越来越多地以其新获得的某种含义出现在科学文献里。可以肯定，目前存在多种新的混沌定义。在本书中我们把目光集中于其中一种。有许多随时间而发生某种变化的过程，如钟摆的摆动、山石的滚落和岸边海浪的破碎。它们中的一部分或许包括滚石和碎浪而钟摆除

* 英语 cold comfort，指毫不起作用的安慰——校者注

** 该书由上海译文出版社 1987 年译成中文出版——校者注

外，其变化并非随机却貌似随机。我用混沌这个术语来泛指这样的过程——它们看起来是随机发生的而实际上其行为却由精确的法则决定。这一用法恐怕是当前科技著作中最常遇到的，而探讨这种意义上的混沌的科学家们已不再感到有必要说得那么清楚。

在浏览当今各种学说时，我们要记住，一些新提法可能会相互混淆。有时所描述的现象是一些在空间上貌似随机分布的东西而非时间上的随机发展，例如点缀在田原的野花。另有一些情形，其分布或发展正是其内在本质而非貌似随机，例如编织在东方地毯上的图案。更麻烦的是，有一些其它术语，特别像非线性、复杂性和分形性，经常会在某种或某些意义上被用作混沌的同义词。我在后面文章中将略述这几个相关的措辞。

J. Gleick（格雷克）在其畅销书《混沌：开创一门新科学》* 中解释了混沌的几种新含义。他认为混沌理论对科学思想的影响最终将可与相对论和量子力学相匹敌。且不论这一预言能否成真，这门“新科学”确已毫无疑问地带着某些优势进入了角逐。可以作为混沌范例的系统十分常见，毋需用望远镜或显微镜即可鉴别，不用慢转速或高速摄影机就能把它们记录下来。据认为是混沌的现象包括简单的日常小事如树叶掉落或旗帜飘扬，也包括复杂得多的过程如气候起伏或生命过程。

我用到“可以作为”和“据认为是”这样的词，是因为上述现象中的某些方面并不十分符合我所描述的混沌，即貌似随机。真实物理系统一般都至少包含一些真正的随机性。就是报时钟里看起来很规则地摆动着的钟摆也会受到气流或墙面振动的轻微扰动，扰动可由屋里走动的人造成，也可由附近街道穿行的汽车造成。如果混沌是那些仅仅看起来像而实质上不是随机的事物，那么，它不就不能包括那些多少带点随机性的日常现象而仅局限于数学抽象了吗？如此一来，岂非大大削减了混沌的普遍意义？

* 该书于 1990 年由上海译文出版社翻译出版——译者注

为避免上述不必要的限制，可以拓宽混沌的定义，让它包括那些弱随机的现象，只要这些现象中看起来明显得多的那部分随机性不是其微弱的真随机性的副产品即可。这就是说，现实世界中看起来具有随机行为的那些过程——或许可以落叶或飘扬的旗帜为例——应当被视为符合混沌条件；因为即使其中任何真随机性消失了，它们依然是貌似随机的。

实践中要清除一个系统的真随机性再考察其结果是不可能的。但我们经常可通过理论来猜测之。实际现象的大多数理论研究都是近似研究。科学家在研究简单的单摆运动（这恰好还不是一个混沌系统）时，很可能忽略任何外来的随机扰动和气流，而把这些因素留给更加实际的工程师去考虑。通常，他或她还会忽略掉维持单摆摆动的发条装置及其内在的摩擦力和其它所有不方便的因素。由此得到的简明系统仅是一个模型，一个完全可处理的模型。如果一个接近实际而没有系统内在随机性的模型仍然具有貌似随机的行为，就可以称这个真实物理系统是混沌的。

弹球和蝴蝶

我那多少有点通俗化的定义可能抓住了混沌的本质，但许多数学家会为之惊诧不已。其它行业的大多数人或许还不了解数学是多么依赖于定义。一个命题的陈述是否正确往往就取决于其中各个用词是怎样定义的。显然，要就某种现象发展一套严谨的理论，就应先给出有关现象的毫不含糊的定义。

目前这个通俗定义确实是含糊的，因为“随机性”本身就有两种很不同的定义。然而，正如我们即将看到的，只需指定其中一种恰当的定义，就很容易消除这个缺陷。更为严重的问题在于那个简单的表述“貌似随机”，它很不严格，因为对某人看来是相似的事情在另一人看来不一定也相似。让我们试着给混沌下个便于操作的定义，同时又要保留那个通俗定义的精髓。

根据狭义的随机性定义，一个随机序列应满足：随时可能发生的任何事件在下个时刻也可能发生。通常这也可理解为：某特定事件在下一时刻发生的概率等于其在此后任一时刻发生的概率。一个常用来解释随机性的例子是掷硬币。在此，可能事件只有两种：正面或反面，它们都可能在下次就发生。假如过程确实是随机的，那下次投掷出现正面的概率（比方说百分之五十或任何其它值）应精确地等于任一次投掷同一硬币而出现正面的概率；这一概率不会变，除非因投掷力量过大而使硬币变了形。如果已知这一概率，那么即使知道上次投掷结果，也不会增加我们猜对下次结果的机会。

诚然，在尚不知道某块硬币的正面概率时，我们可通过充分多次投掷结果来推测它。如果多次投掷后我们发现出现正面的机会为百分之五十五，那我们就可怀疑那枚硬币有偏向性；正面的概率过去是、现在是、将来也必是百分之五十五，而非我们原来所期望的百分之五十。

硬币是完全随机的例子。当人们考虑随机数或想用随机数发生器时，往往就是想要实现这种随机性。在广义的随机性定义下，一个随机序列应满足：下个时刻可能出现某些事件中的任一个；这并不要求过去可能发生的任何事件也可在下个时刻发生。下个时刻的可能事件与刚发生过的事件有关。类似掷硬币且本质上也属于机会性游戏的另一例子是洗纸牌。可以认为洗牌过程是随机的，因为即使洗牌手想作假——比如说他试图在每次交叉洗牌时把牌正好分成两半再使各半的每一张牌交叉顺序叠置——他也不大可能精确地控制其手指肌肉来实现，除非他是游戏机构中的洗牌老手。但是，如果把下次事件理解为下次交叉洗牌的结果，那该过程就不是完全随机的，因为一次交叉洗牌不可能把一副牌中某种给定的顺序改变为任一其它顺序。作为特例，一次洗牌不可能完全颠倒牌序，尽管充分多次连续洗牌自然可形成各种牌序。

在确定性序列中下个时刻只可能发生一件事，就是说其演变

由精确的法则决定。因此，广义的随机性与缺乏确定性是同一个意思，这也正是我用貌似随机描述混沌时想借用的含义。

掷币和洗牌是间断时间上发生的过程——即一次接一次地掷或洗。对于像公路上车速这样的连续变化量而言，下次事件这样的概念就没有意义了。然而仍可定义广义的随机性。我们可以说：未来任一给定时刻可能发生的事情不止一种，比如车速就不止一种。在此可以预料的是：那个未来时刻离目前越近，将发生的各种可能性的范围也越小——正如在堵塞的交通中嘎然停止的小车可能会在过 10 秒钟后超速行驶，但不可能过 1 秒钟就如此。数学家发现引入完全随机连续过程的概念是有益的。但它在自然界究竟像什么却是难以描述的。

动力系统这个专业称谓是指随时间确定性地变化的系统，例如钟摆、滚石和碎浪的数学模型，以及那些具有微弱随机性的变化系统——或许可用现实的单摆、滚石和碎浪作例子。至少对模型而言，系统的状态可由一个或几个变量的数值来确定。对单摆模型，摆锤的位置和速度两个变量就足够了，其中速度可正可负，要视摆锤移动方向而定。对滚石模型，位置和速度仍是必需的。但若要使模型更切合实际一些，就必须增加一些变量以描述滚石的旋转方向和转动。碎浪更为复杂，其较完善的模型将不得不包含几十、或者更可能的是几百个变量。

回头再来讨论混沌，可以说它是确定性的行为；或者，若考虑它出现在稍微有点随机性的实际系统中，也可以说它是近似于确定性的，然而却不是看起来像确定性的。这就是说，现有状态完全或几乎完全决定未来，但却不是看上去如此。确定性行为又怎能貌似随机呢？假如真正同样的状态能出现两次以上，那末随后必然会出现的同样状态就不可能看起来有很大不同。真正发生的事情是：出现了两个几乎（但非完全）一样的状态，它们看起来十分相似，但其后的状态却不必彼此相似，从而观测到了明显不同的演变。在某些动力系统中，两个几乎一致的状态经过充分长时间后会变得毫

不一致，恰如从长序列中随机选取的两个状态那样。这种系统被称作敏感地依赖于初始条件。再加上一些即将考虑的限定，对初始条件的敏感的依赖性就可作为混沌的一个可接受的定义，我将选择的正是这个定义。

"初始条件"并非系统被构造之初存在的条件。它们经常是一个试验或计算开始时的条件，也可以是研究者兴趣所在的任一时段开始时的条件。所以某人用的初始条件可能是另一人的中间条件乃至最终条件。

对初始条件的敏感的依赖性并不仅仅意味着两个状态之差异随时间简单地增大。举例来说，有些确定性系统中，两状态间一个单位的初始差异会发展成一百个单位；百分之一甚至百万分之一个单位的初始差异同样也会发展成一百个单位，只是需要更长时间罢了。而在另一些系统中，初始一个单位的差异会发展成一百个单位；初始百分之一个单位的差异则仅能发展到一个单位。前面那种系统被视为是混沌的，而后面那种则并不认为能构成混沌，尽管它们具有部分混沌性质。

由于混沌是或近于是确定性的，就不能指望那些机会性的游戏能为此提供例证。但有些看起来包含机会性的游戏却能说明问题。在能产生混沌的装置中，最接近硬币和纸牌的一种是弹球器。这里必须是那种老式的、不带旋转器和闪光灯，只靠槽针干扰滚球直至最后得分或死球。

30年代的一个春天，我还在达特茅思上大学，当地的杂货店和食堂忽然增设了几台弹球器。很快就有不少学生偶而赢了相当多的五分币，但更经常地输钱。市府曾想作出决定废除这些机器，因为它们违反赌博法。但最终他们被说服了，至少当时看来是如此。有人告诉他们，弹球器是技巧的竞争，而非机会性游戏，因而完全合法。

既然如此，那为什么学生们在获得纯熟的技巧后仍不会老赢钱呢？原因就在于混沌。对照掷币和洗牌，这里把一次次的撞击槽

针作为一系列"事件"。一个事件的后果包括被撞之槽针、从槽针到球心的方向以及球离开槽针时的速度。注意这里指专门意义上的速度,包括速率和方向,位置也是指相对于某参考点的距离及其位移方向。

设有两球先后离开同一槽针时在方向上略有差别。到下个槽针时,其位置比起槽针间距离来说确实很接近,但比起球径来说不见得小。这样,当一球正面击中槽针并沿其所来方向反弹回去时,另一球可能侧击到槽针而沿一个钝角方向弹离开去。这近似于图1中发生的事。该图显示了两个以几乎相同速度离开弹球器发球活塞的球的中心轨迹。可见,一旦击中槽针,两轨迹间夹角就轻而易举地成倍增大,甚至会发生一球完全没挨上另一球所击中的槽针。这样,游戏者若想使球沿某一预期路径而多击中一次槽针,就必须成倍地增强其控制能力。

当然,图1的弹球器仅是个数学模型,其中的球路是算出来的。模型考虑了摩擦减速效应和球撞击槽针或边墙时的能量损失;没有考虑球在撞击中可能获得的转动量,这会影响下次撞击时球的回弹方式。但这不会改变我们的结论:即弹球行为是混沌的——也即球路敏感地依赖于初始球速。

尽管如此,上述模型仍不足以提供一个完善的混沌例子,因为混沌行为在最后一个槽针被击中后就终止了。设球在运行中共能击中七个槽针,那么,如果初始百万分之一度之方向差异能发展成十度的话,初始千万分之一度之差就可能仅发展成一度。为满足混沌所有要求,弹球器就应无限长(这在模型中是可能的,但在现实中是不可能的),或者想个办法使弹球永远不会停下来。这样,哪怕是亿万分之一度之方向差异,都有机会放大成十度以上之差异。

在任何系统中对初始条件的敏感的依赖性所导致的直接结果之一是不能作准确预报,而对充分遥远的未来甚至连粗略预报都不可能。这个推论的前提是我们不能获得完全无误的观测。肉眼确实不能分辨弹球运动方向上十分之一度甚至一度之差。这意味

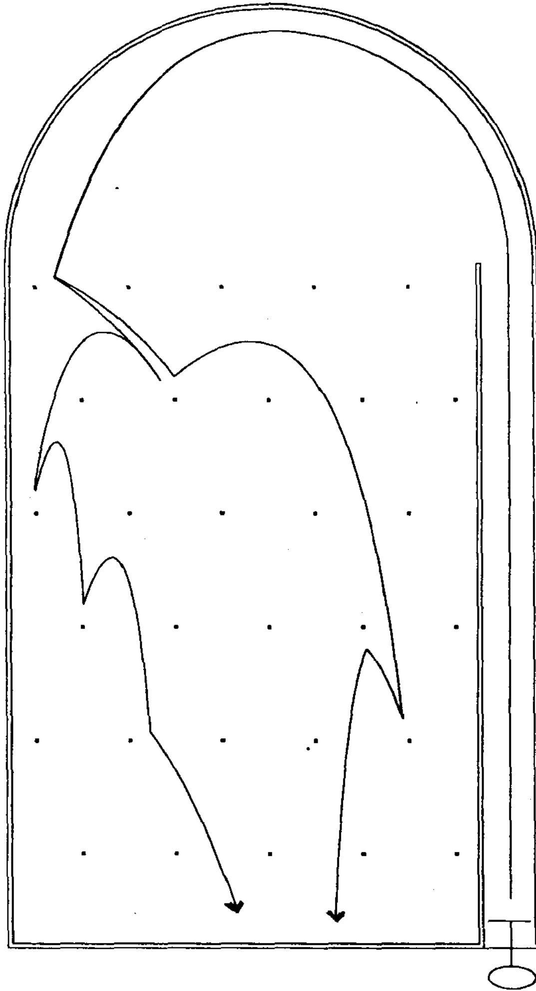


图 1　弹球器。带锯齿形的曲线代表两个以几乎相同速度出发的弹球的球心轨迹。球径可由槽针和球路急转点的距离来判断

着在十度精度范围内不能预报准弹球撞击一次或两次槽针后的走

向，从而也不能预报哪根槽针将是第三或第四次被击中者。精密的电子仪器或许能测出千分之一度的方向，但这仅把可能预报的范围增加两三个槽针。后面一章中将看到，对初始条件的敏感的依赖性也是我们所熟知的天气预报不准确的主要原因。

我已提过两种过程，一种像洗牌那样一次一次地变化，另一种则如公路上车辆的位置和速度那样连续变化。作为动力系统，两者并不是毫不相干的。弹球游戏就反映了这两种过程间的一种基本联系。

假设我们观测到 300 个球依次进入弹球器。可作一张包含 300 个点的图，每点代表一球在其第一次撞击槽针时的球心位置。接着可以就第二次撞击再作一张类似的图。后图可被视为前图的一个完整映射，尽管显然是一种大大扭曲了的映射。在第一张图上很集中的点簇到第二张图上可能也表现为尚可分辨的点簇。研究中所谓的映射是指在间断时间上变化的动力系统，就像把撞击槽针当作“事件”的弹球器。处理映射的数学工具是差分方程。一个差分方程组就是这样一组公式，它们能用所有变量的当前值表达各个变量下个时刻的值。

我把弹球游戏当作一个事件序列，但球在两次撞击槽针之间的运动显然也和撞击时的回弹一样，受精确的物理法则控制。在这个意义上，硬币在空气中的运动也如此。那为什么说后者是随机的而前者是混沌的呢?这是因为每次掷币都是人为进行的，从而每次掷币结果不影响下次结果。而对弹球路径的人为影响仅发生在其击中第一个槽针之前，除非游戏者已掌握了不启动倾斜信号而轻轻晃动机器的技巧。

由于我们可以观测两次撞击之间的弹球，也就可以在任意接近的时刻连续描写 300 个球的中心位置，比如说每十五分之一秒就描写一次，而不是仅在发生撞击时才描写。同样，每幅图都可视为前幅图的完整映射。但现在图中的主要特征从这一幅到下一幅时只变动一点点，纵观整个图列，就像看一幅图在流动着演化似

的。研究中所谓的流，是指连续变化的动力系统，像单摆、滚石以及考虑弹球完整运动时的弹球器。处理流的数学工具是微分方程。一个微分方程组就是这样一组公式，它们共同以所有变量当前的值来表达各个变量的当前变率。

当我们把弹球游戏处理为流而非映射时，可以用一组足够简单的微分方程作模型，并可能求出方程的解来。完整的解应包含能把任意时刻变量的值用以前时刻变量的值来表示的表达式。如果取连接相邻撞击的时间，则表达式将相当于一组差分方程。在此情形下，从求解微分方程导出了差分方程。于是，从流导出了映射。

其实，只要我们在选定时刻观测流，就可从任何流导出映射。假如没有撞击槽针这样的特殊事件，我们也可随意选择观测时刻——比如每小时一次。当用微分方程来定义流时，经常会缺乏适当方法来解方程——某些微分方程根本是不可解的。结果是，有关映射的差分方程作为一些关系式肯定是存在的，但我们却不能搞清楚它们的意义是什么。对有的实际系统，我们甚至不知道如何去写微分方程。为描写被一阵狂风吹拍到岩石岸边的巨浪，包括其所有水泡和浪花，我们能期望写出什么方程来吗？

如果弹球游戏属于混沌正如同掷硬币属于完全随机那样，那末，硬币作为随机的象征早已众所周知，而弹球作为混纯的象征则尚未得到普遍的承认。那种特征目前看来只有用蝴蝶来表征，自Gleick的书问世以来这一表征就成为最恰当的了。该书首章标题就叫“蝴蝶效应”。

这个表述有一段模糊的历史。似乎是继我在1972年华盛顿一个会议上宣读一篇论文后，它才受到重视的。这篇论文标题是“在巴西的蝴蝶拍打翅膀会引发得克萨斯州的一场龙卷风吗？”。我没有回答这个问题，但指出：如果一次拍打翅膀就能引发一场本来不会发生的龙卷风，那它同样也能抑制一场本来应发生的龙卷风。我还指出：一次拍打翅膀对天气的影响决不大于其它蝴蝶的拍打翅膀效应，更不用说其它生物包括人类的活动效应了。附录1重新登

出这篇论文的最初稿样。

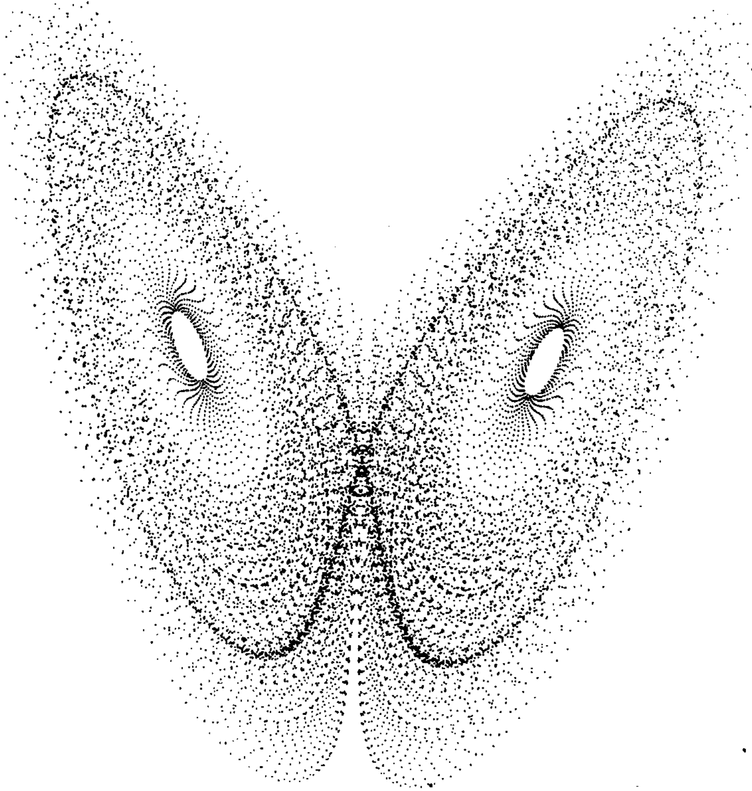


图 2 蝴蝶

这一短语的起源已不太明确了,其原因在于我所详细研究过的第一个混沌系统的某种特征。在我的研究中,被称为“奇怪吸引子”的那组特殊状态的简化图形后来被发现很像蝴蝶,而且很快就被称为蝴蝶。图 2 所示的蝴蝶就是 Gleick 书内封面上的族系的一个代表。与我交谈过的许多人都认为是继这种吸引子之后才命名了蝴蝶效应。或许,真是这样。

有人曾写信要我注意 R. Bradbury（布拉德伯里）的引人入胜的短篇故事“一声惊雷”，这是早在华盛顿会议之前很久就写成的。其中，一只史前蝴蝶的死而不能复生，改变了现代一次总统竞选的结果。

在华盛顿会议之前，我曾用海鸥作为对初始条件的敏感的依赖性的象征。而促使改用蝴蝶的是分会主席、气象学家 Philip Merilees（菲利普·梅雷里），他当时要提交会议议题却又无法同我核实。Philip 最近向我保证：他当时并不了解 Bradbury 的故事。或许，用貌似羸弱的蝴蝶来象征“失之毫厘，差之千里”，是一种合乎自然的选择。

还有比海鸥更早的象征。在我姐姐得知我即将成为一名气象学学生的那个圣诞节，她送我一本 G. R. Stewart（斯图尔特）的小说《风暴》。书中一位气象学家回忆起他的老师曾说过，中国有人咳嗽一下或许会让纽约的人去铲雪。其实在气象界多年来一直有类似的谈论，有时是开玩笑，有时则是认真的。Stewart 的那位老师的话正反映了现实中一些气象学家的看法。

缺乏韵律

心律不齐有多种表现，其中有的是致命的。心脏不像节拍器那样打节拍，而是在不规则的时间间隔上跳动，有时心跳力度也会变。可以猜想心律不齐是混沌的一种表现，因为显然其中丧失了某些应该出现的秩序。现在我们要看看它们或其它任何缺乏韵律的过程是如何与对初始条件的敏感性相联系的。

精确定义有时会带来麻烦。当我们用对初始条件的敏感的依赖性定义混沌时，可能已感到难于判断某种现象是否混沌。

弹球器应无问题。设我们已观测到一个球在某个“初始时刻”的位置和速度，则我们很容易在几乎相同位置上以几乎相同速度驱使另一球滚动，然后观测其是否沿几乎相同的路径运行。若前面

的分析正确，则这里就应是否定的答案。而当我们的系统是迎风招展的旗帜时，就无法进行类似分析了。我们或许能借助高速摄像机录下旗帜行为的片断，却难于恢复旗帜在某个特定曝光时刻的形状——有劲风时尤其如此，更不要说使旗上各点以适当速度运动了。

或许我们可以用硬杆来重复绷紧旗帜，再将砍断硬杆的时刻当作初始时刻。如果担心接下来的行为差异是由于风的扰动而非内在原因，还可借助电扇来做。但无论如何，我们已引入了非同寻常的初始条件——因为微风中的旗帜通常不会绷紧，而这样的初始状态可能导致非同寻常的演变，我们检验混沌的试验也因而变得无效了。

幸好还有一条捷径通往飘扬的旗帜这类系统，这就是寻找韵律。为证实这点，我们先要解释某些动力系统的一个特殊性质，即紧致性。

设在高尔夫球的某轮中你来到你所偏爱的侧边球穴击球点并把球打进场地。你能把第二个球打到第一个球旁 1 英尺* 范围内吗？或许不能。即使没有风，这也需要太大的肌肉控制力，况且球的弹性也不见得相同。但假使你有几口袋球并接连击打球，那么总会有一球落到前面击出的某个球旁 1 英尺范围内，尽管不必是第一个球旁。这倒并非因为你的技能在这一天有所长进了，而仅仅是因为那个场地，或许还得加上几个坑和一个水池，不能保证大量球都落在各自 1 英尺外的地方。即使要求两个落球点相距 1 厘米或更小，上述结论仍然成立，只要让球童在你继续击球前拿开前一落球并做上标记即可。当然为此你需要更多口袋的球。

球场表面是二维的——其中任一点均可由其距奖杯的距离和方向来确定，场地面积又有限。许多动力系统像球场上的高尔夫球一样，其状态可由有限个变量值决定，每个变量都在严格的界限内

* 1 英尺＝0.3048 米——编者注

变化。只要对这种系统观测足够长时间，就总能发现某个状态近于重现了先前已出现过的状态，而这仅仅是因为互不相似的状态数目有限。必能出现任意接近的，即比任何给定程度还要接近的重现状态的系统被称为是紧致的。

从实用的角度看，上述的旗帜就是一个紧致系统。旗帜飘扬时的弯曲通常很像微浪。我们把旗帜分成许多小格子，并用各格点的位置和速度来定义其状态，如果这是一幅美国星条旗的话，那么星的中心也可作为格点，但我们并不用到旗上每一点。在这种定义下，终究会出现两种十分相似的状态，通过适当内插还可发现：在这两种状态下旗帜上其它点的位置和速度也彼此相似。

我们那个弹球器则不是紧致系统。一个弹球在运行中不必也不能出现重复状态，因为摩擦力总在减缓球速。弹球所能重复或维持其速度的唯一方式就是滚向机器的底端。然而，我们很容易刻画出一个略经修改的系统，其中近似的重现状态是不可避免的。

设想有个很长的弹球器，可以把它安置在当地杂货铺外一条略微倾斜的人行道上，有一个街区那么长。把它分成若干段，比方说每段 1 米，段内槽针分布都一样。若有两球在不同段内占有同样的位置并以相同速度（速率和方向）运行，那么它们的完整路径也应相同。从实用的目的说，该系统的状态可由弹球在段内某关键点（例如段内最高的槽针）的速度和位置来定义。这些变量都在一定范围内变化。从而只要那个街区足够长，某个先前状态就必将会近似地再现。

图 3 显示了计算出的一个球的球心路径，该球在狭长的机器里经过了 80 个槽针。机内空间仅有两球宽。槽针被安插在离边四分之一个宽度处。这个长机器被分成四条显示，最右边那条包含头 20 个槽针，向左依次延伸。图的垂直尺度已被压缩，就像用肉眼在机器上方一段距离处观看似的，从而机器顶部圆弧看起来像椭圆弧似的，球下的那块面积也像似被压扁了。为便于研究，你可把该图逆时针转四分之一圈并把球路当作曲线图来看。显然有约三分

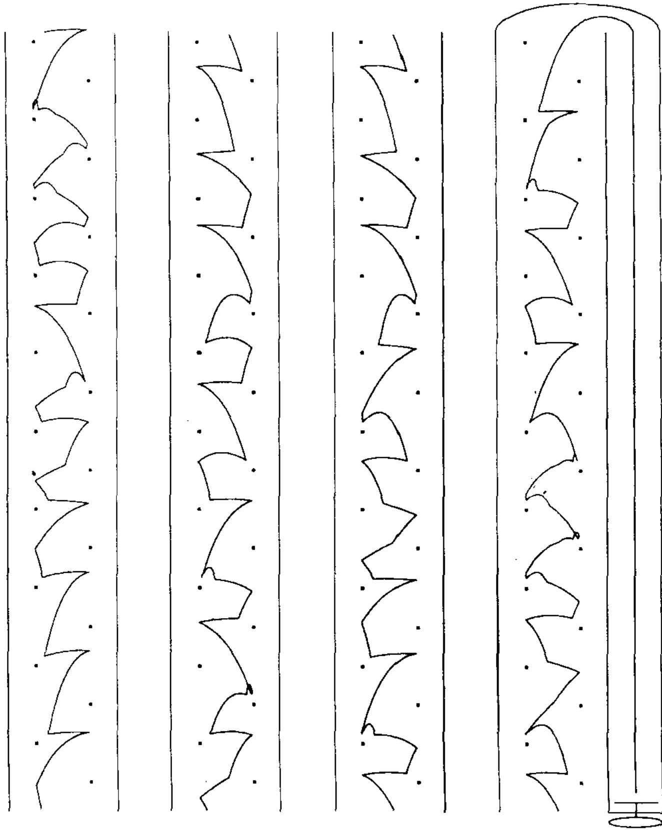


图 3 延长的弹球器及其中一球之球心路径。为显示方便把机器分为四条，左边条接在右边条之后。垂直尺度已被压缩，从而球从上撞击槽针时看起来比从侧面撞击槽针时要更接近槽针些

之一的槽针没被碰到，但在槽针上反弹次数多于在边墙上反弹次数。

我们发现第三条头七个槽针段的球路近似重复了第二条同段球路。在这次计算所用到的初始条件下，我们所期待的近似再现在前 40 个槽针段就发生了。如果机器空间不像目前这般极端有限从

而弹球位置不受如此局限的话，那我们就需冗长得多的等待，但也无需永久等待。

现在假设某个紧致系统，或许是加长的弹球器或许是面旗帜，它不是混沌的，就是说，它不具备对初始条件的敏感的依赖性。再假设某个“初始”状态在10秒后又近似再现了，当然也可设其在1小时或更长时间后再现。从那一刻起，系统行为将近似地再现前10秒的情景，下个10秒又会近似再现这个10秒的情景。如此循环往复，系统的行为就成为周期的，即某种特殊形式将不断重复发生，本例中是每隔10秒就重复一次。也可能不会出现真正的10秒周期，因为即使第十个10秒近似再现第九个10秒，第九个10秒又近似再现第八个，如此等等，那第十次也不见得特别接近第一次情景。这种情况下，系统被称为是准周期的。如果一个紧致系统既非周期的也非准周期的，那它就应是混沌的。

图3所示的个例中，假如其行为不是混沌的，则第二和第三条上半段间的小差异不会被放大，两条后半段也应近似相同，进而第四条亦应类似于第三条。但实际上弹球在第四条一开始就击中了槽针而又略过了第二个槽针，这正好与第三条情形相反。第四条没有重复第三条情形这一事实，或更一般地说是球路既非周期也非准周期这一事实，充分说明弹球行为是混沌的。

再回到飘扬的旗帜，我们知道可以不必使用照相，也不必用其它可能揭示混沌的手段。如果近似再现确实会在10秒钟而非1小时或更长时间内发生的话，最简单的方法是只需去听听那接连不断的啪哒声，并注意其是否存在有规律的韵律或是否是“随机”发生的。我想实际上关于随机发生事件的通俗定义就是指其变化形式无法分辨的事物，而不是指其变化对初始条件的敏感的事物，这种敏感性是不易测量的。其实人们有时就用缺乏周期性而不用对初始条件的敏感的依赖性来定义混沌。但要注意，如果系统不是紧致的，从而并不必然存在近似再现，那么即使它缺乏周期，也不能保证它具有对初始条件的敏感的依赖性。

认准混沌

“混沌”,作为非周期行为的一个标准术语,似乎是在 1975 年开始得到大力宣扬的。当时马里兰大学的 T. Y. Li(李天岩)和 J. Yorke(约克)发表了一篇目前广为引用的论文,标题很简炼,就叫“周期 3 意味着混沌”。在映射中,一个具有周期 3 的序列是指其中任一状态与三个时刻前的状态相同而不同于一、二两个时刻前的状态。由此类推来定义具有其它周期的序列。这两个作者发现:对某类差分方程而言,存在周期 3 的特解就意味着还存在一个无限的周期解集,其中包含各种可能周期——周期 1、2、3、4……等等,同时还存在一个无限的非周期解集。这种情况下,各种可能的行为均可发展,这似乎贴近非专业意义上的混沌定义。Li 和 Yorke 是否意在引入一个新的专业术语,尚不清楚。

他们或许确有此意。在随后几年内这一术语日益频繁地出现。至 1987 年,当它成为 Gleik 的畅销书标题中的关键词时,它已获得永久的确认。

在“混沌”变为一个科学术语的过程中,它也吸取了一个多少有点不同的含义。Li 和 Yorke 用它表示这样一些方程组,这些方程组至少包含一些非周期解,即使有时它们大多数解是周期的。在目前被称为混沌的系统中,大多数初始条件会引出非周期行为,仅个别特例会导致周期性。我把 Li 和 Yorke 意义上的混沌称为有限混沌,而把那些与之相区别的混沌称为完全混沌。

你可能会问:与“多数”解不同的“少数”解在数量上是无限的这一点是何意?其实这种情况很普遍。可以考虑一个方块及其对角线为例子。对角线上点的数目无限,但方块中多数点显然落在对角线以外的区域。

如果你用此方块作镖靶且你的镖头无穷尖锐,那你能击中的点数会有无限多。如果你所瞄准的仅仅是整个镖靶并且能击中它,

那你击中对角线附近一窄条的机会就很小，击中更窄一条区域的机会会更小，而击中精确地落在对角线上一点的概率会小于任何你能给定的正数。数学上称此为零概率。当然，零概率不等于不可能，击中对角线上一点和其它点的可能性是一样的。

在有限混沌中，发生非周期行为正如击中方块对角线上一点那样，是可能的，但概率为零。在完全混沌中，发生周期行为的概率为零。

另外还有一个有关的现象，专业术语叫不稳定平衡，它与完全混沌和有限混沌不同的是很久以来大家已对这种现象很熟悉，尽管不知道它的专业名称。若你试图让削尖的铅笔立起来，那么在任何情况下你都会发现从你撒手到它倒在桌上不会超过 1 秒。简单计算表明一支铅笔立 2 秒的可能性只有立 1 秒的可能性的几百万分之一，而立 3 秒的可能性更小，只有立 1 秒的可能性的几万亿分之一。如果现在活着的人都毕生致力于让削尖的铅笔立起来，那仍然极小有可能使哪怕一枝笔立 6 秒。当然如果你的笔头不太尖的话，你的运气会稍好。

但是，理论指出：一支完全垂直立起的笔将永远立着，它处于平衡中。平衡态是指随时间不变的状态。如果一个与之略有差异的状态，或对之略加干扰而产生的状态，会变成全然不同的状态——比如倒下而非直立的铅笔，那么这个平衡就是不稳定的。如果微小的初始扰动不导致大变异，则它是稳定的。平衡概念，不管是稳定平衡或不稳定平衡，都可以拓展为包含周期行为。

直立的铅笔是不稳定平衡系统的典型。现实中笔不能立起的原因是：手和眼都不能分辨笔是完全直立还是有或许十分之一度的偏差，在无穷多貌似直立的状态中选取完全直立状态的数学概率为零。况且现实中即使精确达到了不稳定平衡，也很快会受到干扰。

不稳定平衡的定义与对初始条件敏感依赖性的定义有重要的共同点——两者涉及到对初始小差异的放大。仅具有若干不稳定

平衡态的系统和混沌系统的差别在于：后者的任何状态，不论平衡与否，其与邻近状态的微小差异都会发展得越来越大。

混沌系统可以具有平衡态，它们必然是不稳定的。弹球器中这种状态出现于弹球沿坡面径直抵达某个槽针时。轻微扰动可导致球从左或右面滑离槽针。

看来我在寻求更大更好的弹球器时，忽略了一个最简单的例子。考虑一个物体在水平面上无摩擦地运动，这等效于一个无槽针、无坡度、无边墙的弹球器。物体将以恒定速度径直远行。若对其速率和方向施以小干扰，其最终位置将远离无干扰时应到达的位置。

我们能称此为混沌吗？尽管有对初始条件敏感的依赖性，却没有不规则或貌似随机的行为。所有可能路径均为直线，可由简单数学公式表示。逻辑上似乎可推论：我们用对初始条件的敏感依赖性作的那个原始定义还缺乏一些基本的限制，因为它只抓住了具有多种独特性质的混沌的一个方面。

有许多方式可使该定义更易于被接受，其中有一种特别简单。以无摩擦滑行为例的动力系动中，某些量自初始被确定后就永远不变，它们其实是该系统的一些常量。本例中速度是常量。若有两相近物体具有相同速度——速率和方向，其初始状态仅在位置上有所差异，那么它们决不会分离。

现在我们就能修改混沌定义了。为此，首先我们把那些在系统演变无干扰时维持不变的量定义为有效常量，当然有干扰时它们可以改变。对无摩擦滑行于水平面上的物体而言，速率和方向是有效常量；对于无摩擦滑行于滚筒里的物体而言，速率和方向在变，但总能量是有效常量。然后我们要区分两类不同的初始条件变化，一类确实改变了至少一种有效常量，另一类则不。前者叫外来的，后者则是内在的。

现在被重新定义的混沌系统是指敏感地依赖于初始条件的内在变化的系统。对于外来变化的敏感性本身并不意味着混沌。同

时，我们可能还希望修改关于如何构成单纯动力系统的看法，即认为：如果我们已改变了某个有效常量的值，我们也就已把原系统变成了另一个系统。这样，新的混沌定义等价于：对同一系统内变化的对初始条件的敏感依赖性。对于不含有效常量的系统，例如加长的弹球器，所有变化都必然是内在的，从而修正的定义与原定义一样。对于许多其它系统，例如无摩擦滑行物，修正的定义——即对内在变化的敏感依赖性——将是更易于被接受的结果。

我们是否已对一种足以引人入胜并成为一门普遍科学理论主题的现象有了一个初步印象了呢？或许很少人会关心旗帜飘扬是混沌的还是有韵律的。弹球游戏中的混沌对于正经想赢钱的人来说是重要的，也是令人沮丧的。而心脏跳动中发生的混沌则涉及到我们所有的人。

第二章　混沌之旅

运行中的混沌

弹球器是我们能用完全定性的推理导出其混沌性质而不必担心会误入岐途的少有的动力系统之一。但弹球击中槽针并回弹时形成的球路急转——即图1中那种十分显眼的特征——却不利于作详细的定量考察。让我们设想一个日常熟知而又有点像弹球器那样的系统，其变化较缓同时又易于展示混沌的许多基本性质，但

我们还不能很快把它说清楚。新系统仍是个斜坡，球或其它物体可在其上滚落或滑下，但不设槽针或其它障碍以保证物体平缓下落，斜坡大小任意。

如果我们的斜坡仅是个单纯的倾斜平面，那就不能指望出现混沌，除非下落物是椭球形的天皇式台球。让我们在斜面上散布些平缓的圆丘，它们可以像弹球器里槽针那样分布——比如像图1那样——但其效果不同。物体不是正对着向圆丘移近时确会像弹球掠过槽针时那样改变方向，但物体正面遭遇圆丘时却会缓缓越过而不是反弹。我们希望发掘出这样一个具有混沌行为的系统，如果它的确存在的话。

为此我们可采用通俗的办法。比如到乡村旅行，找个布满圆丘的斜坡，其上没有树或砾石等障碍，以避免弹球器里槽针那样的效应。然后让一个足球滚下并观察其运动，这时一条不规则弯曲的路径并不见得表示对初始条件的敏感依赖性，因为圆丘及其倾斜度不一定是规则分布的。这样，我们就不得不直接通过考察对初始条件的敏感依赖性（而不是考察韵律）来辨别混沌。为此，我们又要从同一地点放下若干足球以观察其路径同否，并希望任何看得出的路径离散不是由于那无法观察的阵风造成的。为消除风的影响，我们可以使用滚木球，不过我们可能会厌烦一次次地把滚木球搬上坡来。

因而，我们可能宁愿回到实验室构造自己的斜坡，让所有相同的圆丘均匀地分布其上。斜坡可放在桌子上，滚动物可以是一枚弹子。像足球一样，弹子也会因圆丘而改变方向，但现在没有任何东西会阻碍它作周期运动。只要路径不规则，就可怀疑发生了混沌。同样，也可比较多枚弹子的路径。

如果我们偏好数学，还可以从实验室转到计算机。我们能用数学公式表示地形，无需真去建立斜坡；还能通过解方程来描写运动方式的变化，不必看着物体滑落斜坡。让我们仔细看看在图4中我们预期的这个斜坡上会发生什么。图4是该斜坡一个截体的侧视

图。圆丘或许会让人联想起滑雪坡上的雪丘，我也正想选取一个和典型滑雪坡尺寸相当的斜坡，尽管计算机可同样方便地处理任何其它尺寸。对那些远离滑雪区生活的人，我应说明一下，这里的雪丘既非东方的统治者也非雪中探险的工业巨头*。请留意图 5，你或许刚能看出一个孤独的滑雪者正在应付那无所不在的雪丘，这是科罗拉多州爱情山谷滑雪区的一个富有挑战性的雪坡，叫猫鸣坡。雪丘分布很规则，尽管尚未规则到可用简单数学公式表示的程度。

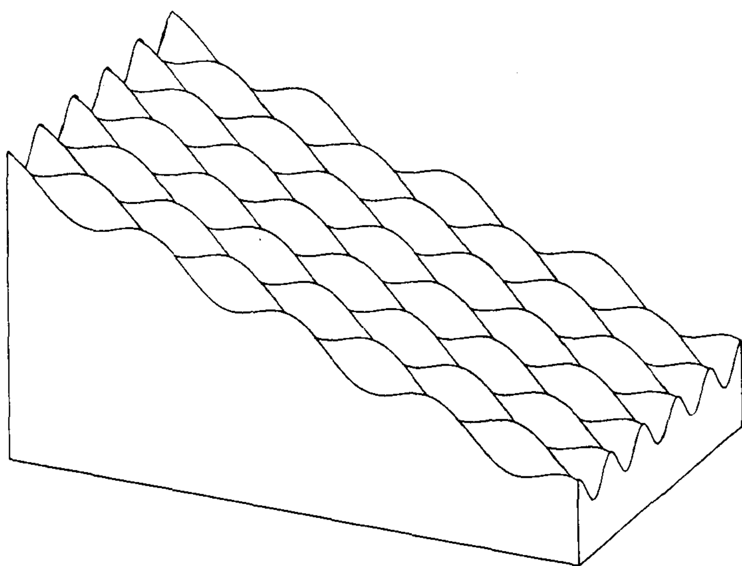


图 4 雪坡模型片断的侧视图

由于我们的物体将连续运动而非跳跃，故有关方程应是微分方程组。它们是牛顿运动定律之一的数学符号表述，该定律是说粒

* 雪丘英文 mogul 的另两个更基本词义是古代征服印度的蒙古人和具有极大权力的人物——译者注



图 5 实际雪坡上的雪丘

子的加速度——即速度的变率——等于作用于粒子的合成力除以粒子质量。复杂物体可被视为许多粒子的集合体。附录 2 给出这

组方程的数学演示。

球等物体滚落斜坡时会获得很大旋转力，为避免数学上的复杂，我假定我们的物体是滑行物。它可以是滑雪者口袋里掉出的一块平整糖块，或是块自由的滑雪板，但不能是个滑雪老手，我把它简称为板。板的运动受三个力的合成作用。一为重力，垂直向下；二为摩擦阻力，与速度反向；再就是斜坡对板的支撑力，垂直于坡面，它部分抵消重力使板保持滑动，既不陷入也不脱离坡面。

实验室模型必然是真实的物理系统，尽管它们未必像自然界中遇到的任何系统。但数学模型则很少能完全复制现实的。真的板有韧性，其倾角可变。但在雪坡模型中我们要忽略这些可能性，并把板当作一个粒子处理。为简便起见还选择了特别简化的摩擦形式，让阻力和板速率成正比——速率加倍，阻力就加倍。换言之，若定义阻尼时间为速率和摩擦减速率之比，则为简便起见，让阻尼时间为常数。其倒数即摩擦系数也就是参数。这样就很容易构造出一组微分方程，其解可用于描述板的运动。

假如使摩擦随斜坡对板的支撑力变化，我们的模型会更切合实际些。例如，当板滑越雪丘而近于要腾空时，摩擦会大大减弱。还可模拟风的阻力。然而，这些精细的处理不大可能有什么本质的影响。

对实验和计算研究有许多不同原则。我们总想使实验室试验尽量精细，但有时忽略一些测量也能获得答案。在计算机试验中首先要做的是给各有关量赋以初值。

我们的模型包含很多参数。从而我们要从一组无限多的动力系统中选定一个。我们已指出，改变系统参数等于引进一个新系统，它或许会具备一种新的典型行为——试看给一架老机器上油降低摩擦系数后会如何改善其性能。所谓同一族动力系统是指除若干参数外形式类似的系统。在不致引起混淆时，我们常把一族动力系统当作一个动力系统。

应想到如下的可能性：只有某些恰当的参数值组合才能导致

混沌。这里的参数有斜坡平均坡度、雪丘高度及其分布、摩擦系数等。重力也是基本参数，但只要在地球上试验，其数值总是不变的。弹球器里总会产生混沌，而新模型不同，计算中甚至不知道如何事先确定能导致混沌的参数值组合。只有通过试验来寻找，或许头次试验就找到了适当的值，或许要试多次，或许根本没能找到并进而断言（或许是错误的断言）该模型不会产生混沌。

介绍雪坡是为了展示混沌的基本性质，故我要从一系列试验中选取各种值。为方便起见，让斜坡朝南，斜面平均向南每 4 米落差 1 米。设想在斜面上画个大棋盘，棋格宽 2 米、长 5 米让雪丘中心位于黑格中心，如图 6 所示，图中还显示了一板滑落斜坡的可能路径。再取阻尼时间为 2 秒。由斜坡地形的数学公式，白棋格是洼地，就像把其中的雪挖出来堆成了周围的雪丘，详见附录 2。使每一雪丘比在它东边和西边的洼地高出 1 米。和弹球器一样，雪坡应当无限长，才可能是完整的混沌个例。

由于下面我们会频繁地遇到模式中的四个变量，故我在这里要给每个变量起个简洁的名字，这些名字可以用单个字母表示或它们的作用类似于微分方程或解方程用的计算程序里那些数学符号。以某洼地中心为参考点，令滑板相对该点的向南和向东的距离分别为 X 和 Y。记速度之向南和向东分量为 U 和 V。注意，若从西侧看这个斜坡，近于图 4 的角度来看，或相当于把图 6 逆时针转四分之一圈，则 $X-Y$ 就像通常的直角坐标系了。另一种做法是把棋盘上相对于某参考点的距离和方向以及速率和运动方向作为四个变量，但这样在数学上麻烦些。

所谓的雪丘和洼地中心实际上是那些相对于倾斜平面的最高和最低点，也即棋盘格子的中心。黑格内真正的最高点在中心点以北 1.5 米处；白格内的最低点则在中心点南边 1.5 米处；我称之为高点和低点。它们可从图 4 中的斜坡截面前缘来判断。

为进行计算，先得给计算机四个数，即 X 和 Y 的米数以及 U 和 V 的每秒米数。然后计算机会算出许多后来时刻的量值。在第

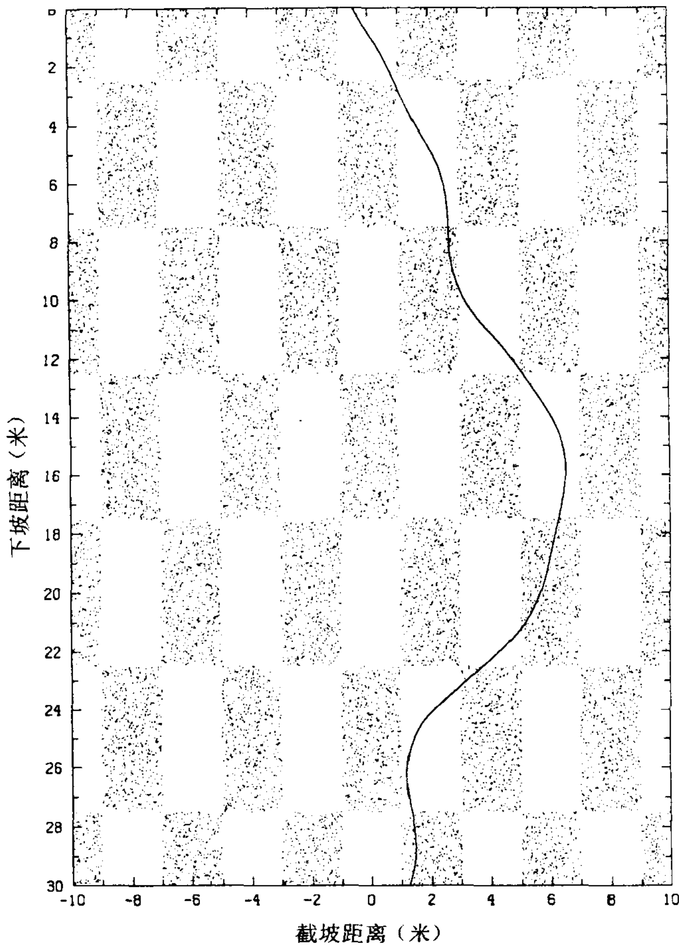


图 6 模型中一段雪坡的顶视图及一板滑落的路径。相对于倾斜平面而言，黑方块区较高而白方块区较低

一个例子中，先取 X、Y、U 和 V 为 0.0、−0.5、4.0 和 2.0，这意味着开始板位于洼地中心西边半米处向东南偏南方运动。板的运动路径如图 6 所示。

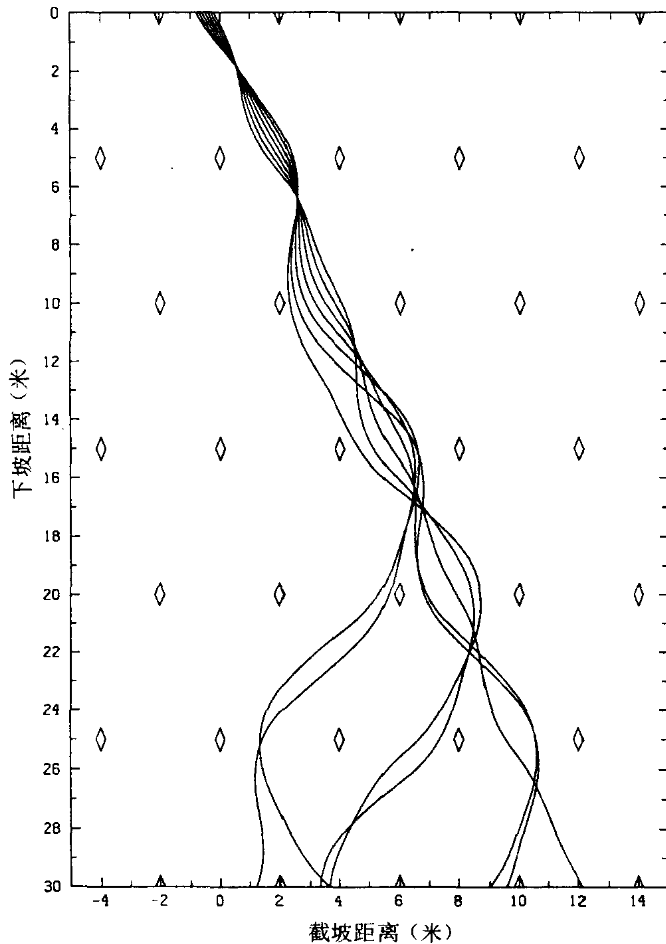


图 7　七块板路径，它们在同一东西向起跑线上两两相隔 10 厘米处以相同速度出发。菱形代表雪丘中心

为了解板的下滑是否混沌，我们转向图 7，它显示了包括图 6 中那块板在内的七块板向南运行 30 米的路径。所有板都以相同速率和方向在同一东西向起跑线上开始运行，起跑点两两相隔 10 厘

米，位于某个洼地中心以西 0.8～0.2 米的范围内。因雪丘而改向的趋势很清楚。不同路径很快交叉起来，但交叉点上状态并不同，因为各自速度方向不一，此后路径就越来越散开了。离出发点 10 米处，初始 0.6 米之差异增大了 1 倍多，至 25 米处已增至 10 倍以上。显然，路径敏感地依赖于初始位置，运动是混沌的。

正如已指出过的那样，混沌的一个基本性质为：相近状态总会散开，不论其初始差别多小。图 8 中七块板最初位于一洼地中心以西 0.503 到 0.497 米的范围，依次相隔仅 1 毫米，然后沿坡下滑 60 米。各路径间差别开始还不能从图上看出，至 30 米处就明显了，接着就和图 7 一样迅速增大。雪坡还经过了其它严格检验。看来只要斜坡足够大，初始差别再小结论都一样。

如果那些路径使你们想起了滑雪道，那我应说明：它们不是熟练滑雪者通常愿意选择的。它们可能近似于你摔倒后继续滑行时所取的路径。

那些习惯于观察自然的人不必担心如何在 1 毫米间距上放滑板，更不用考虑摔倒的滑雪者。我们是在考察一个模型，它和大多数模型一样忽略了一些现实。在此，它忽略了滑行物尺寸，就像不切实际地将它当作一个针头那样，且斜坡还得很光滑以保障针头不停地滑行。当然可以写一套新的计算机程序，来处理不同尺寸和形状的滑行物，但这需要复杂得多的数学分析。

考虑检验混沌的另一途径——即直接观察有否周期性。我们来看看图 9，这是最初那条路径在斜坡上延伸至 600 米的图像。显然，板在曲折滑行，时而向东南时而向西南地穿插在雪丘间，但又并非在等间隔时间上出现方向的改变。我们来看看能从这种行为里得出什么结论。

首先，我们关心的是随时间的周期性，而图 9 仅显示了下滑距离即 X 的增长。需要说明：由于板总在下滑且其速率变化不大，故距离也可近似地度量时间，约 3.5 米等于 1 秒。这样计时就像用了一个时快时慢却又总在走的钟。

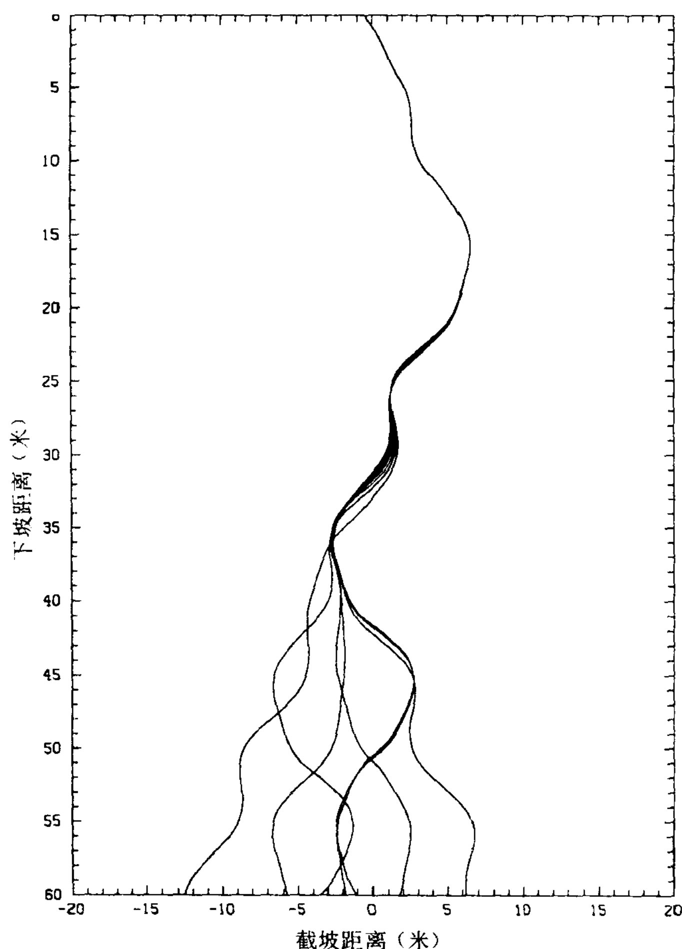


图 8 在同一起跑线上沿东西方向两两相隔 1 毫米的七块板以同一速度下滑的路径

假如整个系统是周期的，那作为系统特征之一的这个钟的走速也应如此，而用此钟衡量的系统变化也应看起来是周期的。下滑过程没有发生随距离的周期性意味着系统随真实时间也缺乏周期

性。

接着要注意，和弹球器一样，滑板在其上下滑的斜坡不是紧致系统，因为 X 可无限增大，Y 似乎亦然。但只要稍改一下有关变量，系统在数学上就成紧致的。对实际系统的变量作点改动而又不改变系统是可能的。例如，用速率和方向表示速度而不用其向南向东分量，并不改变原系统。

就目前情形，我们先把斜坡划分为一些 5 米×4 米的矩形。各矩形包含一完整的白棋格并向东西两侧各延伸至黑棋格中线，矩形中心即洼地中心，其两侧边中点即雪丘中心。再用小写的 x 和 y 代表板相对于其所在矩形中心向南和向东距离，这是两个新变量。大部分时间里 x 会持续增大，就像 X 一样，但当板进入下个矩形时 x 会从 2.5 跳回至 -2.5，同时 y 也会突增或突减 2 米，y 增减取决于板是从西南角还是东南角离开矩形的。当板从侧边越过矩形时 y 会从 2.0 跳到 -2.0 或反之。U 和 V 维持原来的意义。由于斜坡在各矩形内形态一致，未来任一时刻 x、y、U 和 V 值都可由当前值决定而无需知道 X 和 Y，就是说不必知道板正处于哪个洼地附近。这样，U 和 V 及 x 和 y 都在有限范围内变化，新系统是紧致的。

我们因而确定了一个紧致的数学系统，其中 U 和 V 可如图 9 所示那么变化。图中 V 之正负分别表现为向东南和向西南之运动。由于这两种方向的运动并非有规律地交替出现，故可认为至少该变量肯定不是周期变化的，从而即使不参考图 7 和 8，也可放心推断：板的行为是混沌的。仅有的另一种情况——即系统周期超过 3 分钟或在 X 上超过 600 米从而图中无法显示——似乎也是不大可能的。

图 9 中斜坡上的路径可视为一张 $X-Y$ 曲线的图，把它转四分之一圈就像通常的曲线图了。从效果看，板在下滑时就在给自己画图。动力系统理论的许多基本概念都可由这种图表示，但不都是仅就一个变量对另一变量而作的。我们经常关心的是多个变量在

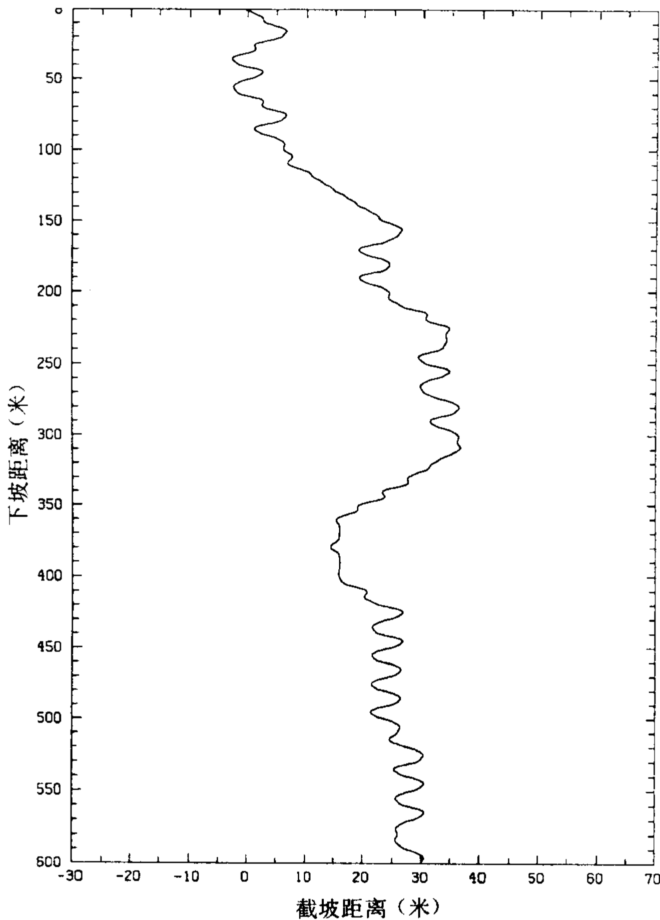


图 9　板在模型斜坡上滑行 600 米的路径。注意南北尺度被压缩，像是从基线处看斜坡那样

同一时刻的值，并希望用二维以上的图，甚至就以系统变量数作维数。如果该数很大，就不可能建立预想的图，但它较小时，有时二、三维的图也能满足需要。

作为动力系统，即使同粗糙的旗帜飘扬模型相比，雪坡也是很简单的，它只含四个变量。但不论如何，多数人仍不易看出四维空间中一条曲线或任何其它图形。

举个例子，有条绳子，比如说晾衣绳，中间打个结，两头固定在屋子边墙上。在我们生活的三维空间，如果不解开固定墙上的一端或切断绳子，就不能解开中间的结。解结理论家演示说：在四维空间能解开类似的结而无需把绳从墙上放开，从效果看这根本就不是个结。这个发现似乎不无道理，但在视觉上对我来说却一点都不明白。

应用一个小于四维的系统是方便的。为此我们来修改一下雪坡模型。

物理上的复杂性和数学上的复杂性并不是一回事。改变一个系统使之物理上更复杂而数学上较简单是可能的。我们在新模型里保留原有雪坡但用雪橇代替板。雪橇有闸而无导向器，使用者只能用闸控制下坡速率 U 为常数，而横向速率 V 可变。如雪丘很高，则雪橇滑越时会减速，闸全放松也不灵。对此还得给雪橇配上马达，以便必要时适当加速。

使用者不可能愿意丧失对方向的控制，也不会对其可能是混沌的历程感到满意，为保持南行速率哪怕是近似地不变，他也必需大量练习。他可选某种特殊电器以便于向前观察斜坡并适时利用闸和马达。这样的雪橇在物理上显然比普通雪橇复杂得多。设计类似的实验室模型也同样复杂，而且需要相应的电器。但新系统的计算机程序却比原程序简单，其较大的优越性还不在于节省机时，而在于：原变量南行速率 U 现在是常数，从而新系统只有三个变量。它们可以是 X、Y 和 V，或 x、y 和 V。另外，下滑距离随时间均匀增长，从而那个时快时慢的钟也变准了。

和原系统一样，我们预计并非所有参数值的组合都会导致混沌。现在参数中多了一个下滑速率 U，但少了一个摩擦系数，它可由雪橇使用者用闸时控制，数学上它可由 X、Y 和 V 决定。使用加

速器在程序中表现为负摩擦。

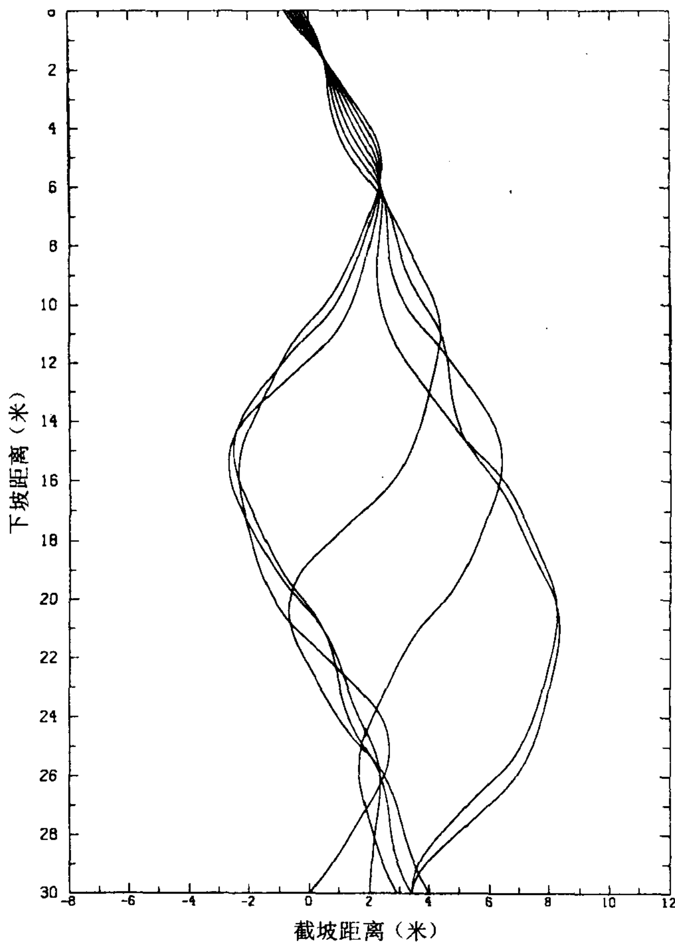


图 10　7 个在同一东西向起跑线上两两相隔 10 厘米处以同样速度出发的雪橇路径

在本例子中我们取 U 为 3.5 米/秒——这近似于原模型的平均下滑速率，其它参数保持原值。图 10 显示了 7 个雪橇在同一起

跑线上依次相隔10厘米处以同一速率出发后的情景。尽管在细节上与图7不同，结论却一致：系统是混沌的。

混沌的核心

和“混沌”一起正在进入科学词典，且已引起广泛兴趣的另一表述是“奇怪吸引子”。我们来看什么叫吸引子以及哪种吸引子看来是奇怪的。

如果留意一下某种已为人们熟知的现象，我们或许会发现某些容易想象的行为模态总出现不了。正常工作的钟摆决不会时而缓时而紧地摆动，每次摆动看来都一样。不论我们等多长久，旗帜在恒定的微风中决不会耷拉着，也不会展开来僵住。檀香山不会有接近冰冻的温度，也不会有15%的湿度。从而，任何系统中反复出现或反复地越来越被逼近的状态是个很有限的状态集。这就是吸引子集。

用数学模型作数值试验时会遇到同样情况。我们可自由选取各变量有意义的初值，但很快有的数值或数值组合就不再出现了。对于在斜坡上以固定下滑速率（即U为3.5米/秒）滑行的雪橇，我们可在一定范围内选取x和y的任意初值以及横向速率V的任意初值。计算表明，V很快就局限于－5.0米/秒到5.0米/秒的范围。

更有甚者，本来连续出现的V值在其它变量的一定数值条件下会消失。雪橇将经常几乎径直滑越雪丘，它也常向东南或西南运行，但只要它正在越过雪丘顶，就会变得几乎径直向南运动。对于计算机，这意味着：当x近于0.0而y近于－2.0或2.0时，V可证明近于0.0。选取初始条件时可能引进的任何过渡态会消失，其后必然出现的那些状态就构成了吸引子集。

对吸引子的兴趣伴随着、或许也刺激着当前对混沌的兴趣热潮，这种兴趣部分地起因于某类具有突出外表的吸引子——“奇

怪”吸引子。吸引子只是一系列状态，奇怪吸引子亦然。特别当变量恰好是些看不见的量如气温和气压时，吸引子又怎能有什么外表呢？有的。只要我们用某种图形来表示吸引子即可。

前面说过，有时我们希望在一个以系统变量数为维数的多维空间里作图。这样做经常行不通，但有关概念是有用的。只能在其中作这种图的那个假想的多维空间叫相空间。

相空间中的点代表动力系统一个特定状态。该点坐标——即相对于某个被称为原点的参考点的垂直距离——在数值上等于该状态出现时各变量所取的值。若系统是一个流，则其方程组的特解可用曲线表示，通常称之为轨迹，这里特解是继某个特殊初始状态之后的状态集，或许也可以是先于该特殊状态的状态集。若系统是个映射，则特解可由一串点表示，也称轨迹。吸引子可用一个简单或复杂的几何图形来表示。

在许多研究者心目中，吸引子与其在相空间的图像表示是一回事。在他们的术语里，点即状态，轨迹即状态的时间序列，而吸引子集就是一个点集。若该集包含一簇点，它就是那个吸引子；若它包含几簇点，各簇间又不存在轨迹，那么每一簇都是独立的吸引子。

有时吸引子可以是单个的点。对于钟摆，无论它如何开始运动，只要不上弦，它总会停下来垂直悬挂着。钟摆停下来前的状态可由两个变量决定，所以相空间必然是二维的，即一平面。此平面上，我们用一点相对于原点的水平距离表示摆锤相对于摆动低点的水平距离。该点相对于原点的垂直距离则不表示摆锤的任何垂直位移，而是表示摆锤速率，正值表示向右摆，负值表示向左摆。这样，不上弦的钟摆吸引子将是该面上一点，即原点，表示静止状态。

总是上紧弦的钟摆的吸引子将是闭合曲线，像椭圆。其实只用适当单位度量摆锤速率，比如英里*/小时或厘米/秒，那它就可以

* 1英里＝1.6093公里——编者注

是个圆，圆心在原点。不论钟摆开始怎么运动，它很快会达到其正常行为，即当它右摆时其状态点就沿上半个圆或正的半圆向右移，过顶点时摆锤速率最大，而当它左摆时状态点将沿下半个圆或负的半圆移向左边，如此作顺时针循环。

许多这类系统不会有很大的变量值，从而除了过渡状态外，吸引子集的点不会离原点很远。就是说它们将处于有限的中心区。的确，它们构成了动力系统的核心。

对于斜坡上的雪橇，容易用 x、y 和 V 作其三维相空间的坐标。包含吸引子的中心区将是个矩形箱，其中 x 自 -2.5 延至 2.5，y 自 -2.0 延至 2.0，因为它们已被限定在这些范围，同时 V 自 -5.0 延至 5.0，因为除过渡态外不会有更大的横向速率。

许多精致的计算机程序能画三维物体，尽管当物体是个复杂的吸引子时它们可能画不太好。对现有系统，我们采取简单的办法，即显示那个箱子的截断剖面。最简单的剖面即平行于箱子某侧面的矩形剖面。数学上可设 x 为常数而获取这样一个剖面，其上为 V 随 y 的分布图。相对于矩形中心的水平和垂直距离分别表示向东的距离和速率，就像钟面向南时钟摆在其相空间显示的那样。在吸引子剖面上画的图就是在那个矩形上标上大量点的位置，这些点既位于该矩形上又位于吸引子上。通过观察吸引子上若干平行的剖面，就能很好地了解其三维结构。

开始可在一矩形里取任意大量点确定为预期的点。每点代表一个雪橇之初始状态。我们在 x 为 2.5 处取一矩形，这意味着所有雪橇将始于一条东西向起跑线，该线正好穿过一洼地及其南边雪丘间的中点。图 11 左上部与前面的图不同，是幅相空间图而非实际画面，它包含 5000 个随机取到的点。它们被视为矩形中所有点的一个样本，代表雪橇之所有可能的初始状态，即其位置可以是起跑线上任意处，其向东速率可以是 -5.0 米/秒到 5.0 米/秒间任意值。图中分不出任何形态，这正是混沌一词的非专业意义。

接着让每个雪橇下降 5 米，从而 x 又为 2.5。在此 5000 点有

了新的位置和速率，将它们点在图 11 左下部。可见这些点已聚集到一个带两个细长臂的近似椭圆的区域。更大的区域是空白的，代表那些过渡的现已不再出现的状态。左右边界上只在中点附近很小范围有点，这些点上 V 近于 0，代表雪橇近于向正南运行。注意如在图中部画条水平线，那线上将有两段没点。

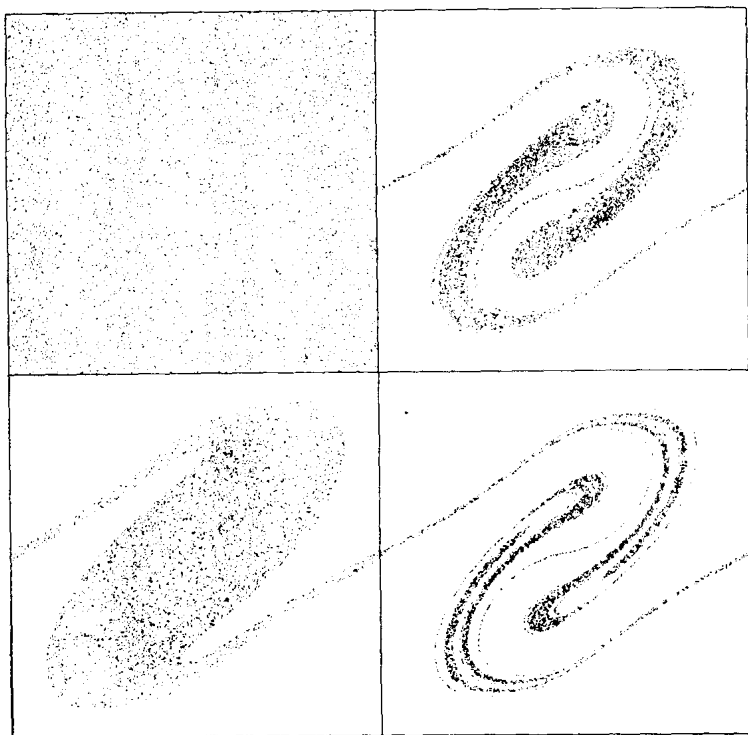


图 11　左上部随机选取的点代表在同一起跑线上 5000 个雪橇之初始横向速率和位置。左下、右上和右下部分别代表它们沿斜坡下滑 5、10、15 米时的相应速率和位置

右边两部分为雪橇下滑了 10 米和 15 米时出现的情景。点被吸引到越来越狭长而扭曲的区域，像是有人用发条玩具中钥匙类的东西在不断顺时针地拧剖面中心部分，同时又把两端固定着。每

个新点阵都可以嵌入前一个。10 米处图的中线上有四个空白段，15 米处则变为八个空白段。

如果继续这一过程，这些点最终会被吸引到的点集就是吸引子的剖面图。从图 11 外推，我们多少已能看出点门道。这个点集将变得无限长、无限细、无限扭曲。图中部的横截线上将有无穷多空白段，空白之间存在点，这些点又会被更多空白段隔开。

确定吸引子剖面上的点集的更常用办法是取一初始状态并点出一个长时间序列，一般应略掉开头那些可能代表过渡状态的点。图 12 显示了向东速率 V 和距离 y 的一万组序列点，向南距离 X 每 5 米取一组值，对应 x 值即最近洼地中心以南的距离总是 2.5。利用图 11 中吸引子的对称性，我又加了另外一万点。决不要介意一个 50 公里长的滑雪坡在现有坡度下将高于珠穆朗玛峰、某些坡段的雪会比较滑溜些等等。与前面一样，我们是在研究一种数学抽象。现在这张图就是吸引子剖面，即图 11 的过程不断进行所将逼近的剖面。看来它明显地包含许多近于平行的曲线。其中颜色深者代表较频繁出现的状态，看似断续的点链则为不常有的事件。

与图 11 一样，图 12 也非铺展在斜坡上的某种现实画面，它仅是一张图。即使图中水平方向距离代表跨越斜坡的距离，但其垂直距离却和上下斜坡距离无关。换种方式来表达吸引子同样是合理的。

由于图中左右边上的点代表同一状态——即雪橇恰好位于雪丘正南——故以某种方式将它们连起来是可行的。为此可把图缠绕在柱面上，像罐头标签那样。也可把图纸卷成一个管，图在内侧，再向管里看。这样看到的图多少有点像图 13——同一吸引子剖面的另一种图。这一新形式对某些目的是较方便的，对其它目的则不太方便。

我们已找出其吸引子的这个系统是一个流，它有一个三维相空间。由微分方程的解可知雪橇滑行路径是连续的。当我们如图 11 那样仅在斜坡上每隔 5 米来看雪橇时，仅仅是在一些特殊时刻

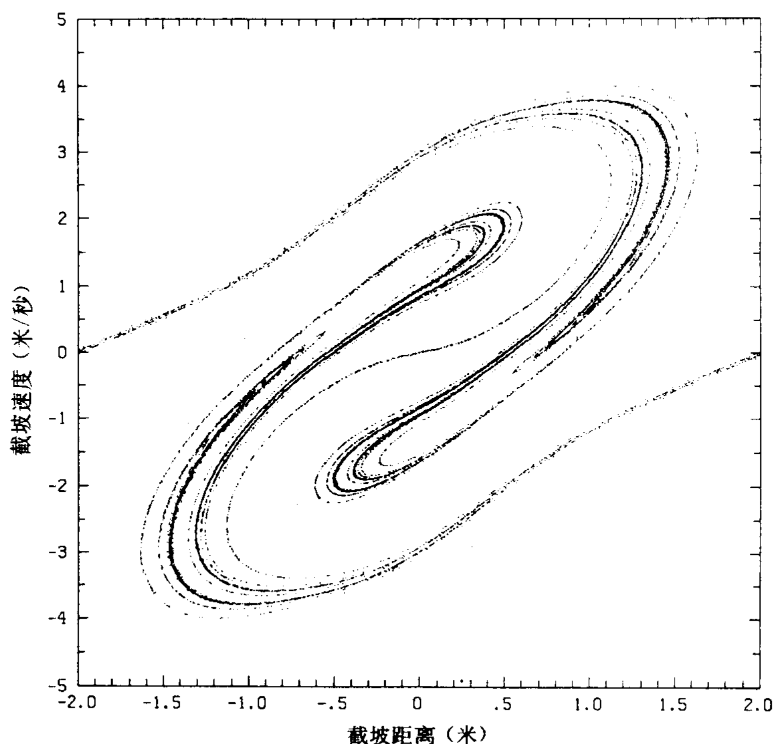


图 12　雪橇模型吸引子剖面

观察它。因而，正如仅在撞击槽针时观察弹球那样，我们把流变成了从其中导出的映射。该映射有一个二维相空间，其中一特定时刻的 y 和 V 值完全决定下时刻值。我们写不出联系前后时刻 y 和 V 的差分方程，但是并不需要写出，因为通过解微分方程已经有了数值解。

这样，图 12 和 13 中处理过的吸引子剖面就是个完整的吸引子——映射的吸引子。把流变换为具有较低维相空间的映射，是由法国数学家 H. Poincaré（庞加莱）引入的办法，也是其研究天体力学问题所用的新颖解法的一部分。被他称为截断面的那个剖面现



图 13 在另一种坐标系看到的图 12 的剖面。内外圆相当于图 12 中的上下边。从内圆向上至外圆的一条线(没画出来)即原图的侧边界

被称为 **Poincaré** 截面,因截面而产生的映射叫 **Poincaré** 映射。

为了了解吸引子的三维透视图,我们来看图 14,其中有九个剖面,对应 x 在 -2.5 到 2.5 间每隔 5/8 米取一值。容易看出剖面特征自上而下的变化,一条连接相似特征的曲线将代表一个雪橇路径。完整的吸引子可视为由一组在垂直方向伸展开的近似平行的面构成,在各截面上则表现为近似平行的曲线。显然图形自上而下不断在伸展、压缩和扭转。最底下的剖面必然和顶上那个一样,只需把左右两半对换一下就可看清了,这就是图 12 中那个剖面。

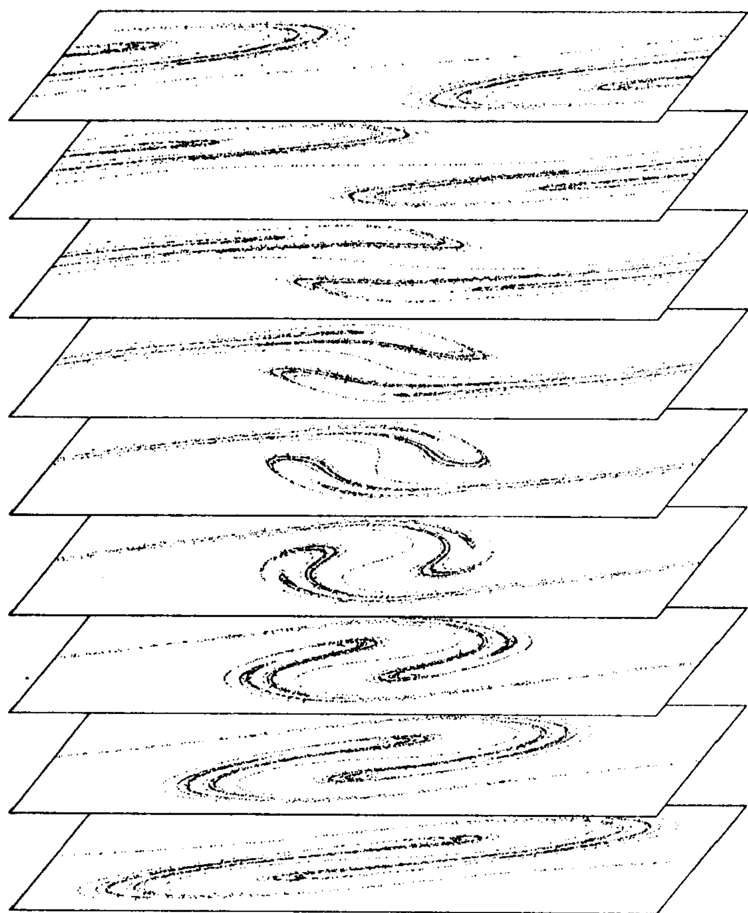


图 14 雪橇模型吸引子的三维透视，由九个平行截面构成。最下面那个就是图 12、13 中的截面

一个吸引子包含无穷多曲线、曲面或更高维流形（即曲面在多维空间的推广），它们常以相似的集合形式出现，集合任意二个成员间又是分开的，这种吸引子就叫奇怪吸引子。70 年代早期，D. Ruelle（吕埃勒）和 F. Takens（塔肯斯）在一篇论文中引进了这个

名称，他们在文中把流体湍流当作我们今天所谓的混沌的一个例子。对此术语一直存在争议。俄罗斯数学家 B. Chirikov（奇里科夫）和 F. Izrailev（伊兹赖列夫）认为奇怪吸引子仅对外行人而言是貌似奇怪的。其观点是：那些无穷复杂的流形是任何人都应能预计到的，尽管很少有人真的去预计。不论如何，这个名称是太形象了，以至于大多数科学家都无法拒绝之，看来它就这样被确认了。该领域一位先驱 J. Guckenheimer（古肯海默）甚至把一篇论文题标为"一个奇怪又奇怪的吸引子"。

一个奇怪吸引子就是某个混沌系统的核心。如果一个具体系统已存在很久了，则某些远离吸引子的状态可能已不存在了，它们也决不会再出现。对于全球天气这个特殊的混沌系统，其吸引子就是气候，即那些至少已偶而出现过的天气型的集合。

还有一些与直觉不一致的情况，例如在奇怪吸引子中可能存在着一些几乎相同的状态却被一些不可能的状态所分隔。这就像是说下周四或一年后的下周四的最高温度将是 25℃或 27℃但不可能是 26℃；或用十分之一度来度量时说可能是 25.1℃或 25.3℃，或者是 26.9℃或 27.2℃，但不可能是 25.2℃，或者 27.0℃及 27.1℃。一个希望继续被雇用的天气预报员或气候学家是不会作出如此声明的。

一条穿过奇怪吸引子的线上的奇怪点集是 Cantor 集的典型例子。德国数学家 G. Cantor（康托尔）开创了这种集的研究，并给数学界提出了一个著名的例子。将一条水平线段三等分，去中段，在所剩两段上继续这一过程，直至无穷。看起来可能会觉得：到极限状态时除了两端点不会留下任何东西。但事实并非如此。举例来说，原线段左起四分之一处经第一步后将成为左边那段右起四分之一处，此后每一步它都会成为其所在那段上自左或右算起的四分之一处。从而它永远不会是一个端点，也永远不会被去掉。

图 11 中的一系列变化型显示出我们模型的基本特点。每个点集通过 Poincaré 映射而被映射到其自身一部分，从而它变成了一

个在相空间占有较小面积的点集。较小面积的点集又会被映射成更小面积上的点集。如果初始点集占据一个圆，那一系列映射就会至少暂时地将之变为一系列近似的椭圆。由于系统具有对初始条件的敏感的依赖性，相近点会被映射成相离较远的点，从而那些椭圆的长轴必将，如果不是马上，变得越来越长。同时短轴会更快地变短以使椭圆面积越变越小。

图 15 和前述吸引子图一样，是个相空间剖面图。左上角的圆所包含的点代表一组雪橇的初始位置和速度，它们位于某个雪丘略东一点，向正南偏东几度的方向运行。那些离圆越来越远的椭圆形曲线内的点代表雪橇下滑了 1、2、3、4 和 5 米时的位置和速度。显然一条轴在不断变长而另一轴在变短。最后“椭圆”被扭曲得看起来像一段曲线。其长轴伸长约五倍，短轴则压缩了二十多倍，从而面积还不到初始圆的四分之一。

相空间内面积不断减小的二维系统或多维体积不断减小的一般系统，不论其是否在一个或几个方向上伸展，都叫耗散系统。实际耗散系统一般包含阻尼过程，如摩擦。许多熟悉的物理系统是耗散的，尽管有的看起来不像耗散系统。但当人们无心寻求吸引子时，甚至使用非耗散数学模型作分析还更方便。例如，依靠发条装置抵抗摩擦阻尼而维持运动的钟摆就常被当作无强迫无阻尼系统，其实它是耗散的。

图 11 的系列的变化图型虽然在逼近一个奇怪吸引子，但我们仍可怀疑这种行为是否只是我们所研究的这个系统的特点。一个简单的分析将说明：只要各变量有限，奇怪吸引子就应是混沌耗散系统的普遍特点。下面还会看到，非耗散系统可能根本就没有吸引子。

为简明起见，考虑二维系统。首先回顾一点：混沌系统中两个几乎一样的状态最终会发展成两个像从某个长序列中随机选取的状态。这意味着相空间中一小区域，如图 15 中的圆，经一段时间后将变成一个跨越了吸引子大部分范围的区域。如果系统是耗散的，

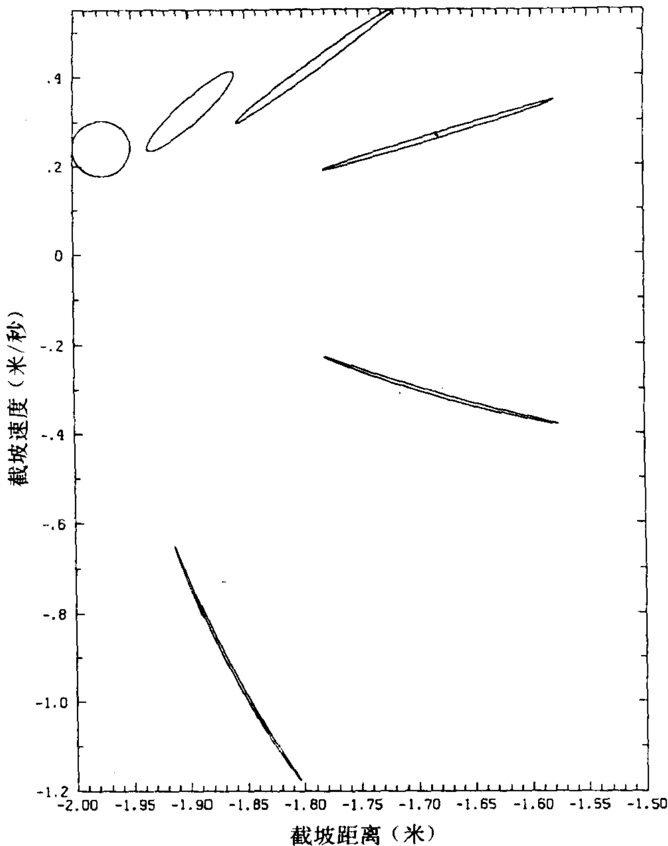


图 15 圆内点代表一组雪橇之初始横向速率和位置。拉长的圆形结构,按离圆距离增大的顺序,代表相距 1 米的同样雪橇下滑的位置与速率。注意本图只占图 12 中一小块面积

则新区域面积应比原区域小,而由于它又已伸长了,所以它必然很窄,看上去像一段曲线。

其次注意:原来的小区域还可被分成很多更小区域。相仿地,每个小区域经过足够长时间也会变成一个几乎跨越整个吸引子的狭长带,就像一条曲线的一部分。把这些曲线段连起来,原先那个

小圆就变成一段长得多的曲线。极限状况下该曲线应无限长。由于不断变形中这个区域会越来越像吸引子，吸引子也就必然是一条无限长的曲线。

因为各变量是有限的，所以这个无限长的吸引子——如图 12 和 13 所示的那样，就必须在有限范围把自己作无限次折叠。看来这的确很“奇怪”。

显然，一直线将在无穷多个点上截过此吸引子，但还需仔细研究才能说明这些点必然是个 Cantor 集——即每对点之间都有空隙。在作如此研究前，人们尚不能排除例外的可能性。不论如何，上述简单分析已足以把我们从 Chirikov 和 Izrailev 所说的外行人行列中解放出来。

现在回到有四个变量的滑板的研究。这里的吸引子包含在一个四维“箱”中，箱的截体，即取 x 为常数时的截体，将是三维的。它也就是个普通箱子，包含了 Poincaré 映射的吸引子。

三维空间中的奇怪吸引子可以是无限复杂的线，也可以是无限复杂的面。为用图来确定吸引子形态，可以在箱子某一面上画出其投影。对前者我们将看到一些曲线，对后者则将有一些分离的面交叉投影到箱子面上并完全充满某块面积。

对现有例子，我们可重复进行产生图 12 中吸引子的计算程序，而不管 U 事实上在吸引子上是变化的，从而可获得吸引子剖面投影。由此得到的图 16 很像图 12。我们断言：如雪橇模型那样，板模型也有一个吸引子，其剖面上包含一些曲线。若相空间里 U 变化的那个方向垂直于纸面，那我们只需把图 16 中部分向里推而另外部分向外拉，就可得到吸引子的三维截体。图 16 中两曲线交在一起时，可能就得把其一往里推而另一向外拉。

一无限小椭球体轴伸缩率的长期平均值是动力系统的鉴别性特征。对雪橇和板，只有最长轴会伸长。假如板模型中有两轴伸长，或只是第二轴缩短率小于第一轴伸长率，则 Poincaré 映射的吸引子都将是曲面而非曲线。在多变量系统中，许多轴都可伸长。假如

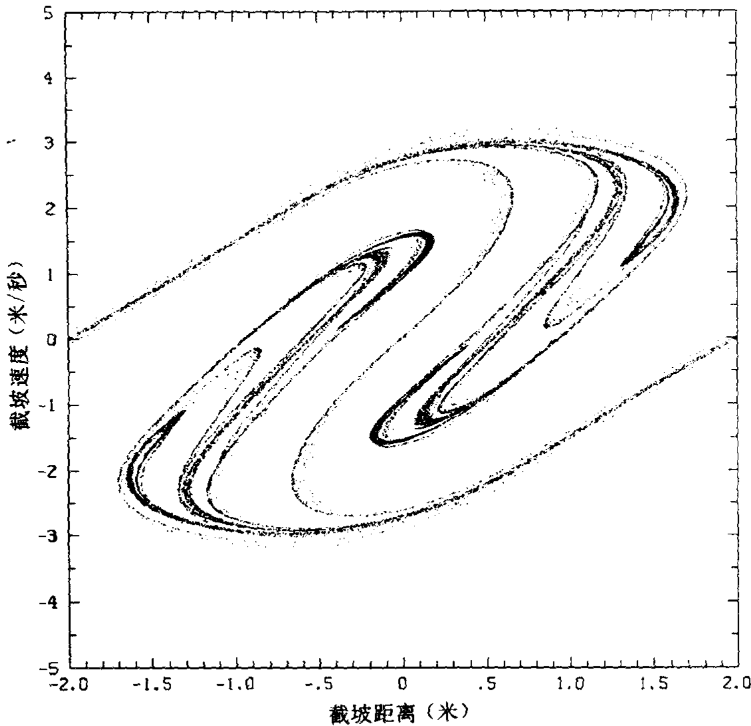


图 16　板模型吸引子之三维 Poincaré 截面的一个二维投影。投影只计 V 随 y 变化，而不计 U

系统是混沌的，则至少有一轴会伸长，又如系统是耗散的，则某些轴必须更快地缩短以保障椭球体体积不断减小。

破裂的核心

与雪橇不同，板模型还有第二个吸引子。板在洼地低点附近很慢起动或它一开始就被推向某个洼地时，会落入陷阱，即最终停在洼地低点。其所获得的这个稳定平衡态是个吸引子，在四维相空间表现为一点。从而，模型的行为并不总是混沌的。事实上，如果一

组吸引子乃是一个系统的核心，则该板模型有一个分裂的核心。

图 17 显示了覆盖在斜坡上的那张棋盘的若干黑白棋格，还有一条特别的闭合曲线。开始停在曲线内的板最终会停在低点，即图中央的黑点。开始停在曲线外的板则会沿斜坡下滑。在更大范围的斜坡图上，每个洼地周围都有一条类似的闭合曲线。

当系统有多个吸引子时，相空间中被引到某吸引子的点就构成了该吸引子的吸引域。每个域都包含其吸引子，但包含更多的是些代表过渡态的点。两相邻吸引域之间隔有域边界。

由于本模型的吸引域是四维的，显示它较为困难。固定一变量而截取一个相空间剖面，就像作图 16 那样，则得到的是个三维体，显示起来仍不方便。用双截面可部分地解决这一问题。即固定任意两个变量，让另外两个变量变化。这样吸引域的双截面将是二维的，其间将被一条一维域边界——即一条曲线分开。

为简明起见，固定速度分量 U 和 V 为 0，X 和 Y 等于相对截面上某参考点之垂直向下和水平向右的距离。从定义看 X 和 Y 就是斜坡上自某洼地向南和向东的距离，所以这个相空间的双截面其实就是斜坡的一张图。域界的双截面也就是图 17 中的闭合曲线。

有人可能曾以为那曲线本应是椭圆或类似的光滑曲线，但显然它更像一张树叶，具有六个不同尖点。对此应有所解释。

考虑一板开始停在那条曲线上一点，在相空间该点代表域界上的状态；因为该点不在域内，从而它不会接近任一吸引子。唯一的可能性就是它保持在域界上。一旦板运动，摩擦将消耗其能量，而只要它不沿坡下滑或离开域界，就不会获得能量，从而它总会停下来。

在一个黑棋格及其北面的白棋格内共有四点能使板保持静止。其中一个是洼地低点，是稳定平衡态，另外三点在图 17 的闭合曲线上，是不稳定平衡态。其中之一为曲线上的一个尖点，即雪丘的高点，也即“树叶”的最南端点——简称南点。另外两点为树叶边

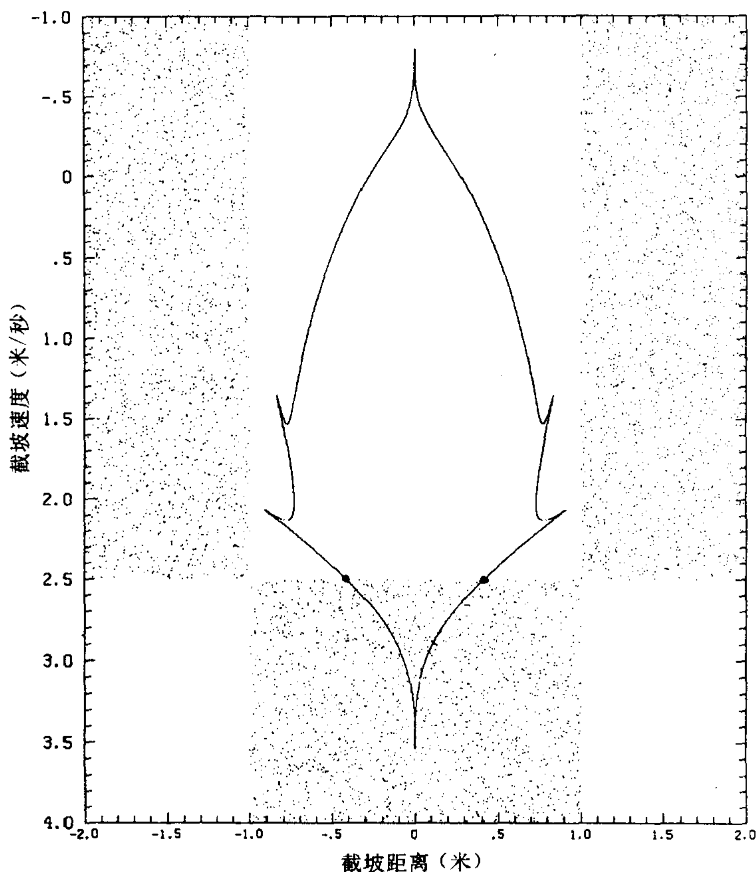


图 17 滑雪坡截面。带棱曲线把斜坡上的点分成两部分，开始停于其中一部分的板将陷入洼地，停于另一部分者则将沿坡下滑。中间黑点为洼地低点，另外两黑点为鞍点

界和棋格边界的交点，图 17 中用两黑点表示。两者均为鞍点，其上的斜坡形状就像一条山脊小道，从鞍点沿树叶边界走就向上升，而要跨边界走就会下落——进入洼地或滑落斜坡。

停于南点附近但非南点的板会沿最陡峭的下降方向运动。如

在南点正北，它将向北滑过洼地，然后又返回，最终停在低点。但南点所在的山脊在南北方向较长，东西两侧更陡峭，所以只要开始板在南点附近除正北以上的地方，它都将迂回着沿两侧下滑，然后再直接滑落斜坡。如果板既不滑向洼地也不滑落斜坡——即它位于域界——那它必然是位于南点之几乎但非完全正北的附近，越靠近南点其离正北之偏差应越小。这就解释了南点必是尖点的原因。

域界的最北点称为北点，开始停在北点的板将径直滑越洼地停到南点上。从而几乎位于北点的板将停到南点附近，其后的运动如同它在南点受到一点扰动那样。大多数情形下板会继续滑落斜坡，但若板始于北点的几乎正南的附近，它就会陷入洼地。从而北点附近的域界将很像南点的情形，应构成一个尖点。

开始停在树叶两边的滑板一般将行至较近的那个鞍点停住。但显然各边中间有一小段，始于其上的板将穿行至对面的鞍点停住。始于这两小段和其它段分界点的板不会停到鞍点去而只能停到南点上。因此这些点附近的域界也应类似于南点附近域界的情形。就此也解释了余下这些尖点。

现在注意：完整的吸引域是四维的，其域界是四维空间中的三维体。从效果看，此三维体本身又构成了一个新的三个变量的动力系统，它嵌在那个较大的系统中。这种新系统可以有其自己的吸引子，若吸引子不止一个还可有吸引域及其域界。在现在这个例子中，新系统有两个吸引子——即两个静态鞍点。其吸引域是三维体，那张树叶边上的光滑部分是其双截体。域界则是二维的，其双截体就是那几个尖点。在单截体而非双截体情形下，尖点将像刀锋，其完整结构要通过四维图像来显示。

由于新系统又有其自身域界，这个域界上的状态还可构成更小的动力系统，嵌套在上述三维嵌套系统中。它只有一个吸引子，即静态南点。至此嵌套过程才算完。

更一般的动力系统的域界可以有很复杂的结构。即使在目前例子中，它们也比看上去的更复杂。作为域界或新动力系统，它们

构成了动力系统理论的另一分支并吸引了许多科学家。

非混沌系统也可包含多个吸引子。在板和雪橇模型中，若雪丘与洼地高度之差显著减小，就会有两个吸引子，对应两个周期性弯曲的路径，一向东南，一向西南。它们各包含一条曲线，在 Poincaré 截面上则表现为一个点。

吸引子是典型的不变集——集合中各点经映射后仍然是原来的那些点。如有多个吸引子，则每个吸引域都是一个不变集，而域界也是一个不变集，有时被称为分型线。另有一种不变集可联结不同吸引子，相仿地似应称之为联结线，但一般将之连同它所联结的吸引子一起称为吸引集。不要顾名思义地混淆吸引集和吸引子集。后者有时仅为前者的一部分。可以像作图 11 那样来构造吸引集：开始用大量点代表一个无穷集，再不断用其自身映射来决定会出现什么，至极限时即可见吸引集。

从而图 11 所逼近的吸引子即吸引集。图 18 是类似作出的，但模型中雪丘比洼地高 50 厘米而非 100 厘米，图中各变化型则代表雪橇每下滑 10 米而非 5 米后的情景。至 30 米处，大部分点都进入了两个小黑区。初始 5000 个点是随机选的，如果类似映射无限重复下去，这些点最终可能都会变成黑区中的两点——即两个吸引子。但若我们开始用到了方域中每个点，那不论多少次映射后都会有些点留在那条无限长而扭曲的丝线上，这个吸引集的残留部分把两个吸引子连在了一起。

另一类混沌

让我们再来看看行为良好的动力系统的那个范例——钟摆。摩擦缓慢但也确凿地消耗着能量，发条装置则补充着能量损失，或许是通过在单摆摆动至极限时给它一点拉力的方式。若把摆锤速度随其垂直位移画成图，就会得到一个简单椭圆似的闭合圈，这就是单摆摆动状态的相空间表述。

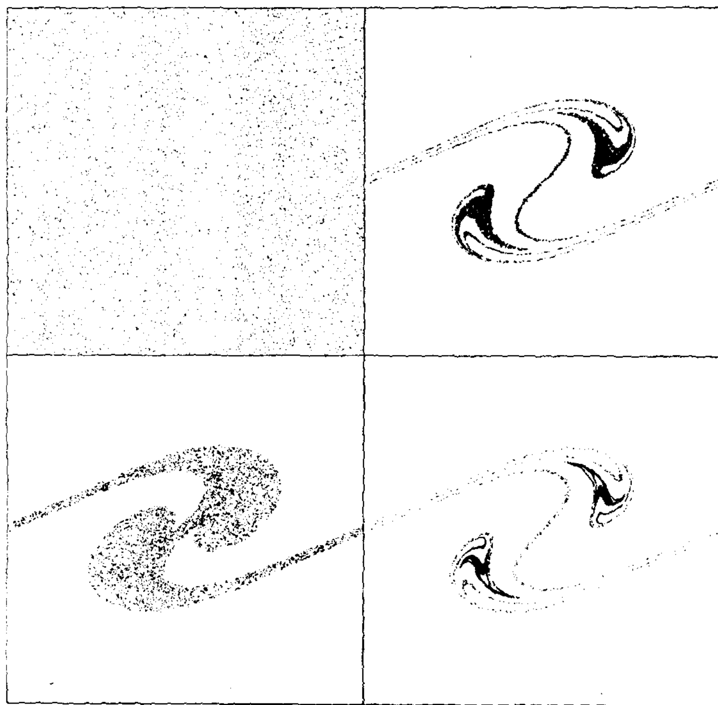


图 18　左上部包括许多随机选择的点，它们代表 5000 个雪橇的横向速率和位置。雪丘比两侧的洼地高 50 厘米。左下、右上和右下部分分别代表雪橇下滑 10、20 和 30 米时的速率和位置

正如早先所见，该圈代表吸引子。给单摆一个推力后它会摆得幅度更大些，但或许 1 分钟后它又恢复原状，新状态被吸引到原来那个圈上。

现在设想在钟摆正常摆动时我们取消了摩擦，同时也取消已不再必需的发条装置。钟摆将继续摆动，就像什么也没改动，其状态将描出几乎一样的圈。这就是为什么无强迫无阻尼单摆常用作正常运行之钟模型的原因。然而，该模型作为动力系统却和实际钟

摆没有多少共性。对无摩擦单摆,那个闭合圈并非吸引子,不在此圈上的状态永远不会被吸引到其上。若我们推一下单摆,所得更大幅度的摆动会持续进行,原有圈将被一更大圈所替代,直至我们适时地再扰动它一次,我们看不到过渡态的消失,并不存在过渡态。在相空间中任何两同心圈之间的点集将保持其面积,而决不会减小。

系统的相空间体积(系统为二维时亦称面积)随时间不减不增者被称为体积保守。系统的某些量如总能量随时间维持常值者被称为守恒。守恒和体积保守经常并存,两者兼备的系统被称为**Hamilton** 的,尽管爱尔兰数学家 W. R. Hamilton(哈密顿)建立的方程系统要更特殊些。那些忽略了所有耗散过程和能源的现实物理系统的模型一般都是Hamilton 的。可能最为人熟知的现实的Hamilton 系统就是太阳及其周围的行星。至于无摩擦单摆,相空间中散布的点集不会辐合到更小点集上,它不具有吸引子。

Hamilton 系统可以是混沌的,这点可从弹球器来定性推断。弹球器行为混沌却并无耗散,所以混沌系统不一定有奇怪吸引子,尽管大多数常见的紧致耗散混沌系统有吸引子。虽然 Hamilton 系统缺乏这样一个引人入胜的特征,许多科学家还是愿意把它作为研究对象。

让我们把雪坡上的板变换为 Hamilton 系统,来看看它为什么会没有奇怪吸引子。为此我们在数学上消去摩擦也消去平均向南的高度落差,后者的作用就像发条装置推动单摆那样。现在雪丘和洼地就被放在水平面上了。我们甚至可以设想新系统是板在老系统中运行很长时间从而不再有过渡态时突然形成的。然后我们可以猜测:若我们不再改变什么,那系统的运动就不会受到实质性影响,就像钟摆情形一样。然而计算机告诉我们:根本不是如此。

板的能量有动能,由速度决定,也有位能,由相对于洼地的高度决定,两种能量之和随时间不变。从而总能量为模型中的常数。人们自然可以把模型视为一族动力系统——每个能量值对应一个

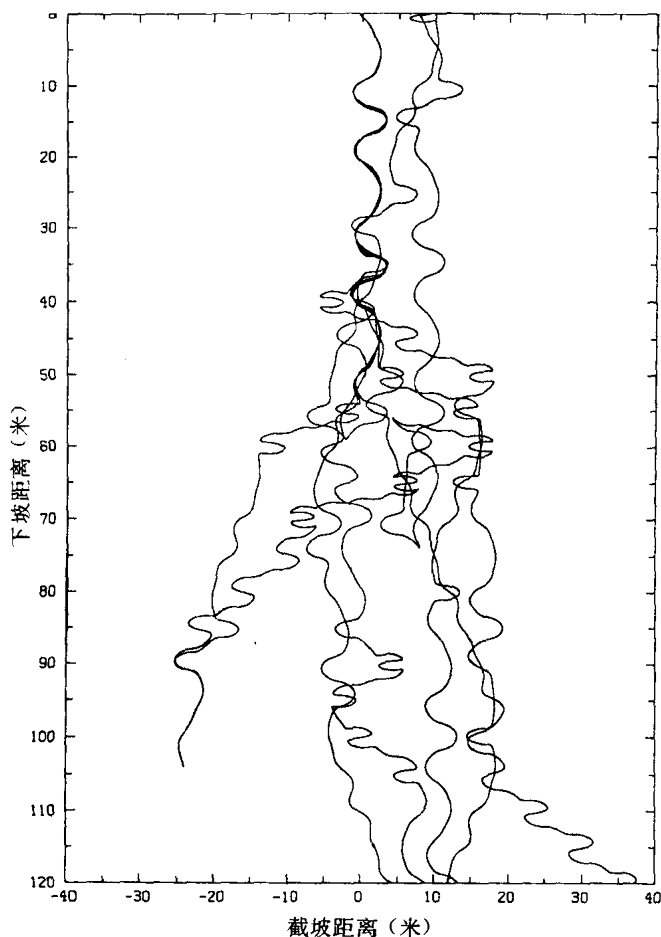


图 19　在 1 厘米间隔起跑点上以同样的能量和速度出发的七个板路径，所用模型为 Hamilton 的雪"坡"，无摩擦、无连续向南降低的坡度

系统。我们来详细考察一下一组具有相同能量的板的可能行为，在当前意义下，这些板属于同一系统。如果能量很小，板会陷入洼地。能量稍大时，板会从一个白棋格角部穿行到另一个白棋格，但还不

能深入黑格。能量再大些，板就可去任何地方。为明确起见，我们来考察一下中间情形，即取能量值为到达雪丘顶所需最小能量的十分之九。

分析耗散的雪坡模型时，我们先观察以几乎相同条件起动的七个板，看其路径是否很快散开，进而推论其是否为混沌。研究新模型仍可如此。这里起跑点间隔为 1 厘米，在图 19 中看似一个点。由图可见，路径在前 50 米已明显散开，表明存在混沌，但其后变化太不规则，以致于分不清哪条路径是哪儿出发的。有两个板甚至折回并越过了起跑线，这在耗散模型中是不大可能的。新系统是守恒的，即板的能量保持不变，但这不能保障原耗散系统具有的向南运动。

有许多方法可用以揭示这些路径的长期特征，但我们研究耗散模型时用过的办法却是特别简明的。先选一初始点，再点出横向速率随位移的变化，这次只给出 x 为 0 的情形，对应板正越过一条横截洼地和雪丘的东西向线。对于耗散系统，这一过程将显示出一个奇怪吸引子的剖面，但对于 Hamilton 系统，我们或许已觉察到会产生其它情景，因为不存在奇怪吸引子。

图 20 显示了当图 19 中某条路径上的起点作为初值时所发生的现象。所有点似乎充满了一块有时被称为混沌海的面积，而不处于间隔的分离曲线上，这倒并不奇怪。而令人吃惊的是那四个显眼的洞。假如它们最终果真会被充满的话，那末如此大面积区域就似乎不可能被遗漏。

如果这个点序列——代表某条路径关键位置状态的序列——确实不会进入洞中，那么自洞中开始的序列也同样不可能进入海。这是因为一路径方向逆转后仍是一可能路径，而一点序列秩序颠倒后也仍是一可能序列。让我们进一步来重复几次试验，每次都在一个洞里选一个初条件。

由此得到图 21，包含四块正好嵌进图 20 中洞中的图案。每个新序列包含一个闭合圈，或是一系列小圈围绕一个大圈。序列点并

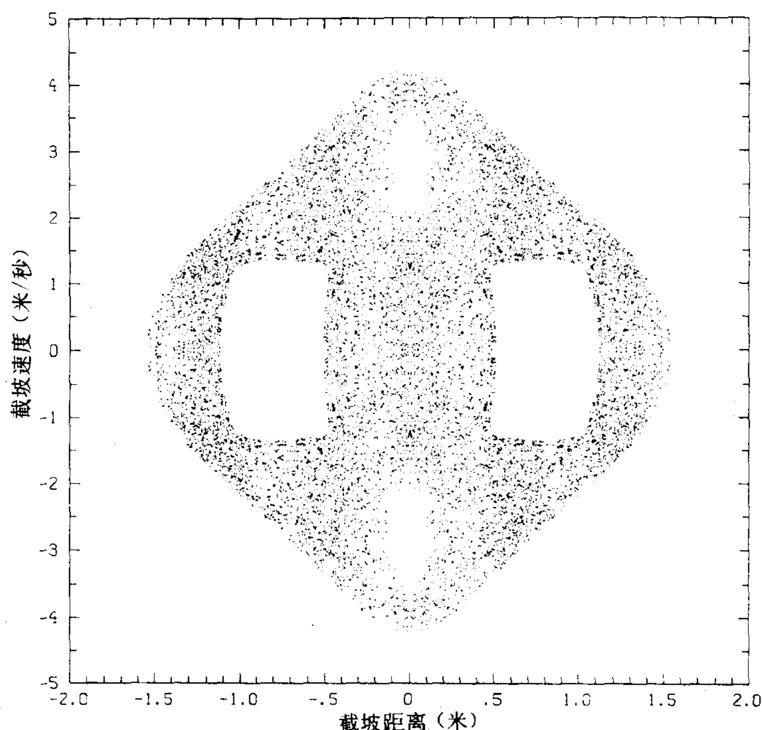


图 20　Hamilton 雪坡模型产生的混沌海的 Poincaré 剖面。总能量为到达雪丘顶所必需能量的十分之九

非沿环线连续运行，它们总是以大致相当的步子从一个位置跳到下一个，如此循环，最终会把有关环线上的空白都填满。

图 22 把最上面那块图案放大了，水平方向放大更多些。其中的那些圈由六个点序列产生。一个序列生成前图中刚能看出来的那七个小圈，另一序列生成其中更小的七个小圈。最大圈外那十九个小圈是由一个序列产生的，该序列顺序访问十九个圈后重新再回到第一个圈。图中没有显示混沌海的边界，它就在那些圈外，但在到达边界之前，还会遇到无穷多次我们已见过的那种结构——即小圈外包有大圈而大圈外又绕有小圈链。这种结构各自并不相

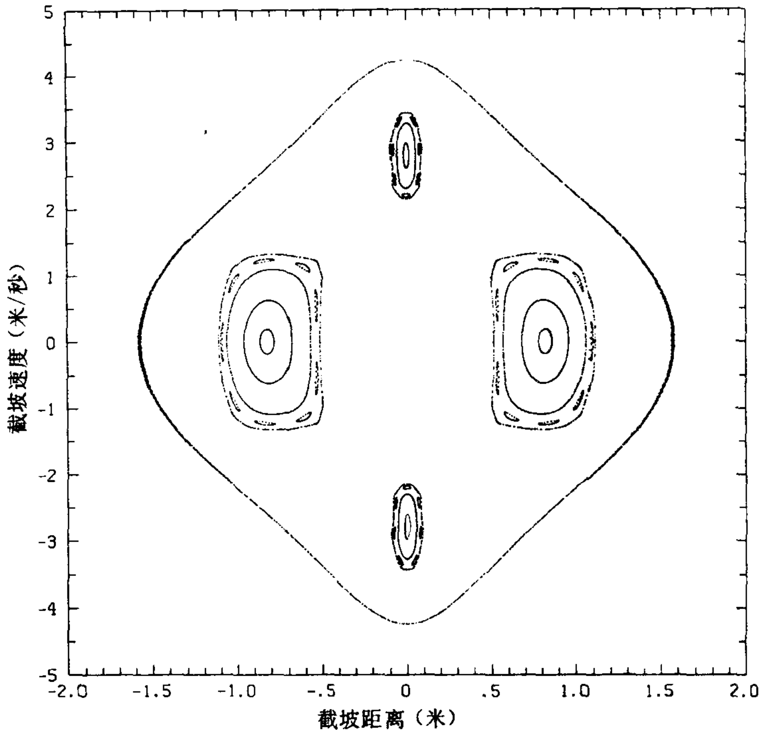


图 21 上图混沌海的一些周期性岛屿和一个周期性海岸线

同，它们同奇怪吸引子一样引人入胜，在 Hamilton 系统中十分普遍。注意图 21 中较大的图案中的小圈链里包含九个小圈，而非七个。

适当选取初始状态可形成单点，即那些同心圈的中心，代表周期路径，同心圈本身则代表准周期路径。图 21 中那围着海的大圈代表另一准周期路径，沿着它运动的板将在两雪丘间的洼地里穿梭。耗散系统经常是完全混沌的，带有奇怪吸引子，或者是完全周期的，如具有简单吸引子的单摆。在 Hamilton 系统中，即使对一个能量值，也会有一些初始状态导致准周期变化而另一些则导致混

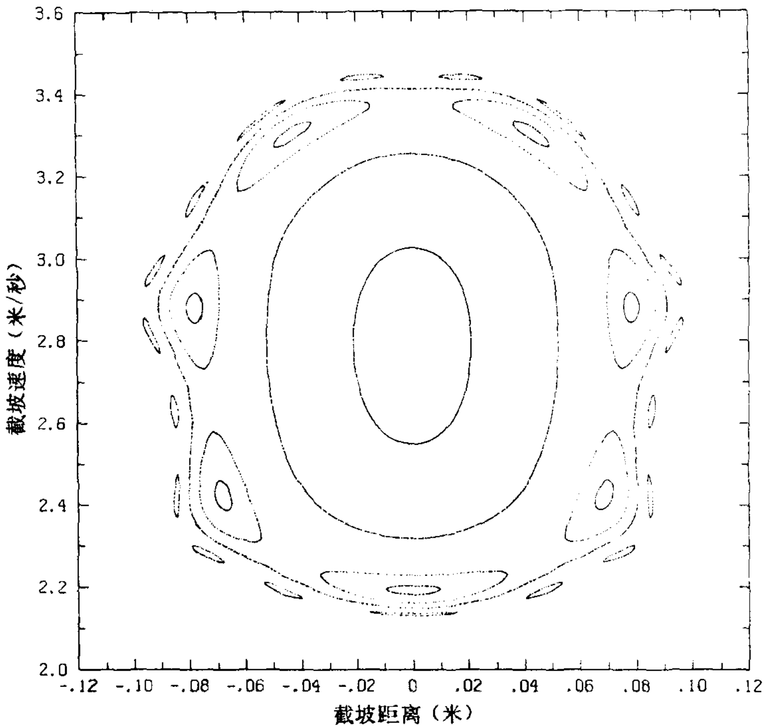


图 22 图 21 上方那个周期性岛屿的放大图。注意水平方向放大更多沌。

总能量取其它值时，环心所对应的周期路径会变得不稳定，选取与它们相近的初始状态会导致混沌路径，从而图 20 中的洞不复存在。另有些总能量值则会导致更多洞，尤其当能量值刚够保证板达到雪丘顶时更可能如此。顶上板快停时遇到的微弱坡度有利于产生规律性运动。图 23 和图 20 类似，但现在的能量为跨越雪丘最小能量的 99%。相比之下，现在具有更多洞，那两个大洞比原先更大，上下那两洞则近于消失。

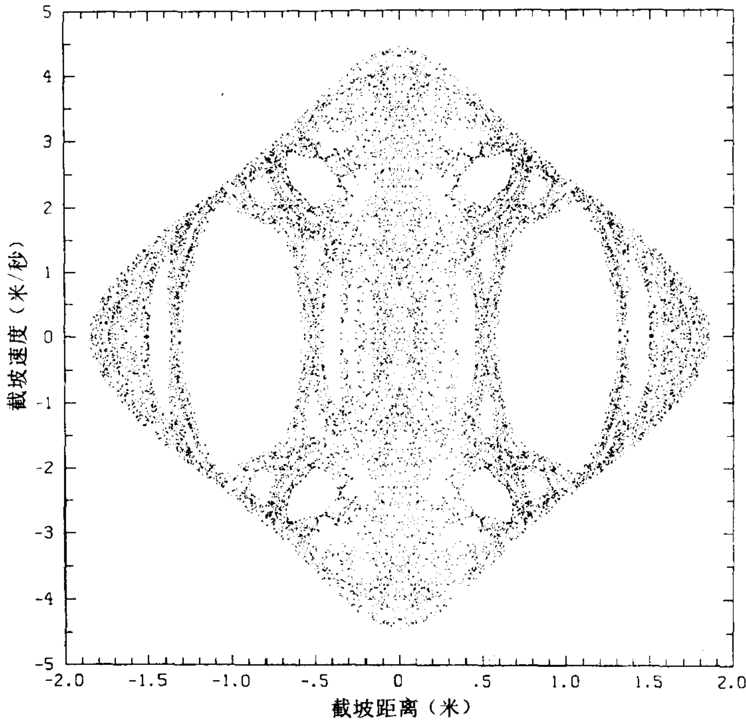


图 23 类似图 20 的混沌海的 Poincaré 剖面，总能量为跨雪丘必需能量的 99％

混沌忽隐忽现

多年前我参加了一个会，当时混沌已引起相当多重视但其普遍性尚需分析，分会主席建议大家提些迫切需要进一步研究的话题。有人提出"通向混沌之路"。我想我不会认同，并不是针对这个无疑是很重要的话题，而是针对这种说法。我觉察出一种含义：即为了解混沌，就应知道其如何从某些较"正常"行为——规则性行

为中产生，为此需要不断改变某族动力系统以观其特征变化。我认为把规则性行为当作更基本的类型是不恰当的，可以反过来说：为了解规则性，就应知道其如何从混沌发展而来。我建议有关话题同样可标以“从混沌出发之路”。

的确有许多族强迫耗散动力系统在无强迫时只有静止态，而当强迫渐渐增大时先会发展出规则性运动，然后才出现混沌——如果它真存在的话。但在实际系统中，如全球大气环流，强迫总是很大，没理由相信天气曾像对钟那么有规则，后来才变成混沌，也没必要杜撰一条从某种规则性到现在普遍存在的混沌之路。

毫无疑问，从规则变成混沌或由混沌产生规则所必然经过的事件序列确是动力系统族的基本方面。对某一参数之微小变化的普通响应乃是吸引子或其它特征的微小变化。然而，有时细微得几乎不能察觉的参数变化将导致系统行为的质变：从静态到周期，从静态或周期到准周期，以及从静态、周期或准周期到混沌。而混沌也会突变为更复杂的混沌，当然所有这些变化也可反过来进行。这种变化叫分岔。

有多种途径产生分岔。参数增大时某稳定平衡态会变为不稳定的。若原来状态是吸引子，那它将不再是；小扰动会放大并产生新的行为模态。从不稳定到稳定的变化同样可能。设有一个无摩擦陀螺（这恰巧是个 Hamilton 系统），当它慢转时只能在垂直站立时才处于平衡态，但它不论如何都很快会倒下，因为这是不稳定平衡态；而当它快转时则会持续站立，轻微扰动只能导致轻微晃动。

另一种情形中，某行为模态会突然消失。板静止在雪坡洼地低点，是这类分岔的例子。把雪丘对洼地的高度记为 h，h 减小而其它参数不变时，雪丘高点和洼地低点均会消失。显然当 h 降至 80 厘米以下从而再也不存在稳定或不稳定的平衡态时就是这种情况。若分岔使一种行为模态突然消失而不是仅仅变为不稳定，那此类

分岔就叫鞍点-结点分岔*。

为检验参数变化幅度相当大时出现的分岔结果，我们回到斜坡上的板，这次它滑动很快而不会陷入洼地，我们来看看 h 变化时其行为之变化。图 24 和 25 为分岔图。垂直坐标 h 单位为厘米，横坐标则是 V 的临时极值，即板在振荡中获得的最大向东速率或最小向西速率，振荡指反复地从低值到高值又回到低值。注意改变的参数不是驱动力，而只是对任何情况下都会发生的下坡运动进行修正。

图中光滑曲线表示周期性行为。每次振荡就像前一次或更前一次一样，从而对应任一 h 值，只有一个或几个不同的 V 极值。出现阴影的区域如两个图的顶部，就是混沌了，这时在振荡过程中 V 可在一个广阔的值域内取任何值。

构造图 24 时 h 从 0 开始，即开始没有雪丘和洼地，以小步长渐渐增至 h 为 120，这比最初那个例子中的数值稍大些。图 25 类似，但其中 h 从 120 变到 0。初看起来两图都揭示出：在很广的 h 值域内，板行为没发生质变而只有小的量变，但在几个值处行为突变，这就是分岔点。两图大致相同，但在 22 至 44 厘米处有一明显差别。这一特点及图中其它特征在早先被发现时就已被解释了，数值计算是用来确定它们会在何处出现，有时也用来确定其是否出现。

先看图 24 的正中心部分。两条稍倾斜的直线般的曲线在图 25 中也存在，代表两不同但又对称相关的周期路径：即板在雪丘间向西南和东南拐弯的路径。h 为 73 厘米处周期行为变得不稳定。板将过快运行以致不能完成下一个拐弯，直至形成新的稳定行为——即一个较弱和一个较强的振荡。尽管振荡可以维持其自身周期，但重复运动的间隔却增大了 1 倍。系统经历了一次**倍周期**分岔。

---

* 鞍点-结点分岔也称切分岔——译者注

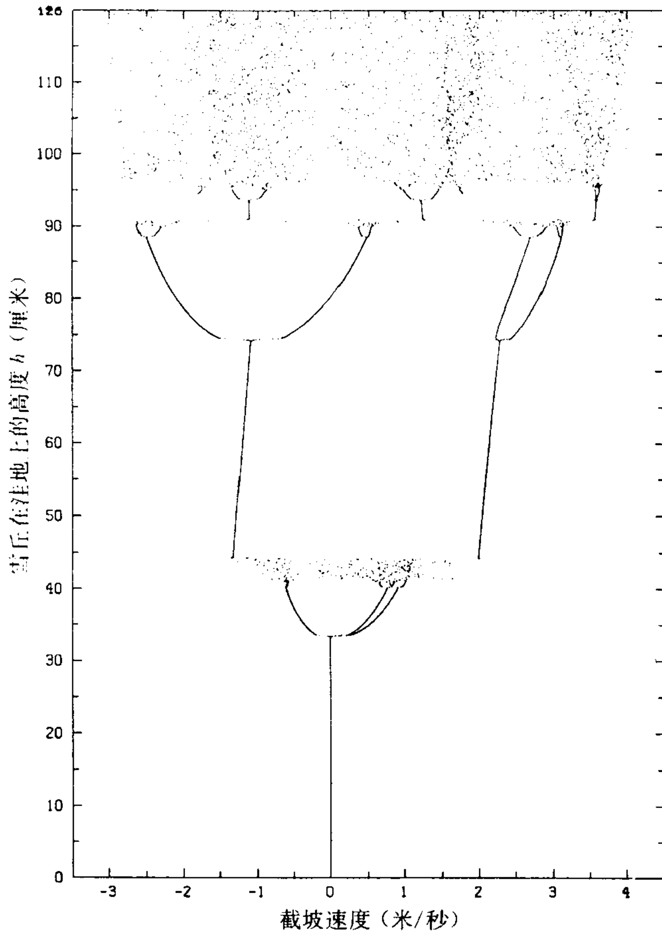


图 24　当板沿斜坡下滑时，板之向东速率 V 在振荡中可能取到的极值（横坐标）。雪丘与洼地的高差 h 标在左侧，h 以小步长渐增时求得 V 值

h 进一步增大时，新的振荡也变为不稳定，周期再次倍增，这可见于 h 为 88 厘米处。虽然目前这张图的分辨率尚不足以显示进

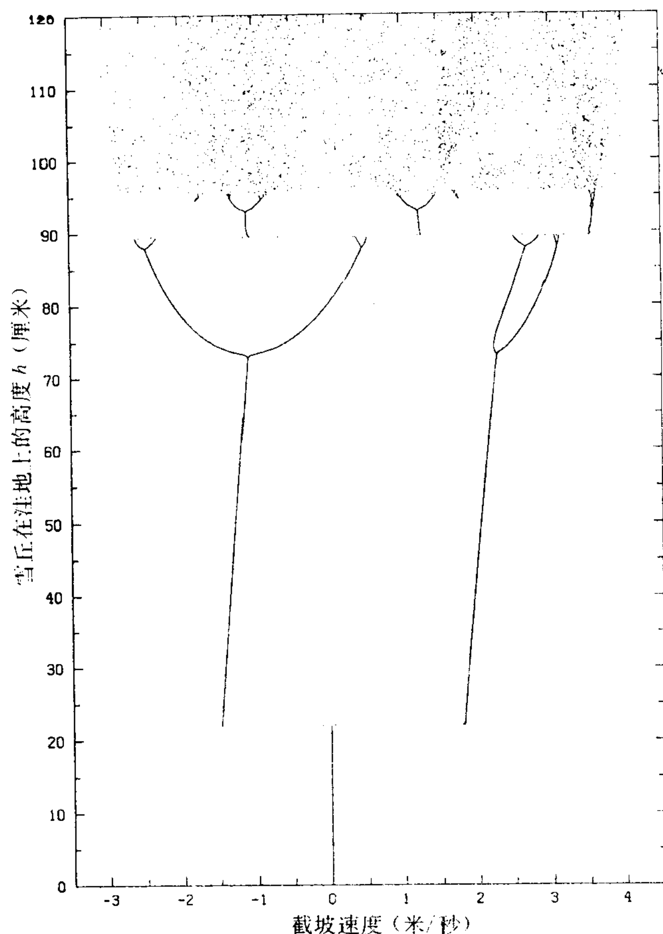


图 25 同图 24，但在 h 以小步长渐减时求得 V 值

一步发生的事，实际上 h 更慢增长时周期仍会无限次地倍增，直至极点——发生混沌。

成系列的倍周期分岔直至混沌，是动力系统的普遍特征。它们不仅在数学模型中，也在大量实验室试验中不期而遇地或被有意

地观察出来。如果一个骑师在小跑的马上刚学加速跑以及如何在马鞍上顺次起伏而非每次都被弹起和回落，那他就应感谢周期倍增。当前例子中（但非一般情形中），紧接在周期倍增之后的混沌很快又过渡到另一种周期行为，见 91 厘米处。

图 24 底部只有一个数值为零的截坡速度 V。这意味着板向正南滑行，径直越过雪丘和洼地中心。接近雪丘时板位于丘脊上，只要它稍向东或西偏移就会产生滑偏趋向。但它离直线不远时又接近了下一个洼地，从而又回到直线上。加上摩擦阻尼效应，板总会保持直线路径。然而板接近雪丘顶时必然越来越慢，从而越过雪丘比越过洼地费更长时间，这一差别当雪丘和洼地高差越大时也越大。h 达 33 厘米处，板在雪丘上停留过长，从而摩擦的稳定效应不足以克服那些不稳定效应，直线路径就变得不稳定了。板必将有新的行为，由图可明显看出，它将经历一个三相振荡，但不会净向东或西跑。

这一振荡看来也如图中所示那样经历了周期倍增，然后又产生混沌。板不断无规律地穿越南北向直线，但 h 增至 44 厘米时它在一个大振荡中摆动过大而不能再返回，结果就陷入一条介于雪丘间的向西南或向东南的路径。混沌行为将不复存在，而仅可能成为过渡态。这就由混沌分岔出周期性。

图 25 中 44 厘米处的周期振荡是稳定的，h 减小时仍维持着。直至 h 为 22 厘米处振荡才消失，但并非因为它变得不稳定了，而是因为板不再能滑行足够快，以致它离开一个洼地时无法抵达西南或东南方的另一洼地。就是说发生了一次鞍点-结点分岔。在此存在一个很大的 h 值范围，对应的动力系统可以具有两种行为模态，也即有两个吸引子——如分别计西南向和东南向运动则可认为有三个吸引子，各有各的吸引域。

再回到 92 厘米处，我们看到那个三相振荡也是稳定的，因此当 h 减小时，在 h 增大时发生的混沌并未再次形成。同样在一个较小的 h 值域上动力系统具有不同吸引子及不同吸引域。反之当 h

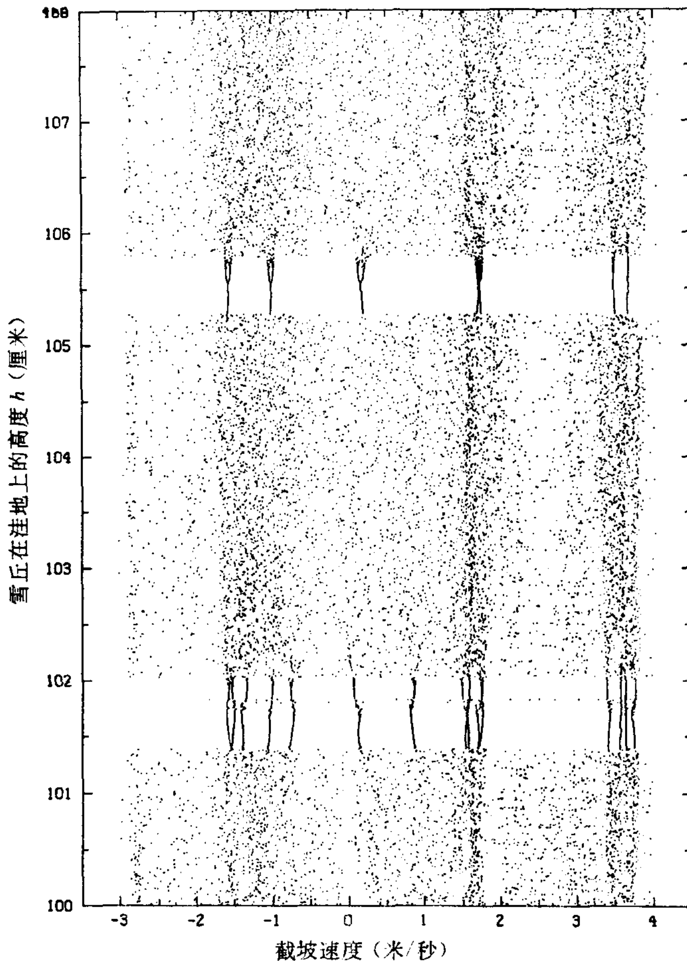


图 26 图 24 上部一横条在垂直方向的放大，揭示了原图没有分辨出的两个周期窗口

增大时，周期倍增再次发生，很快出现的混沌趋于维持。

实际上，这个混沌带仍含有周期“窗口”。它们因 h 步长取得过大而未能在图中表现出来。图 26 显然反映出其中的两个窗口。作该图时用了较小的 h 步长，垂直尺寸放大了 15 倍。在 105 到 106

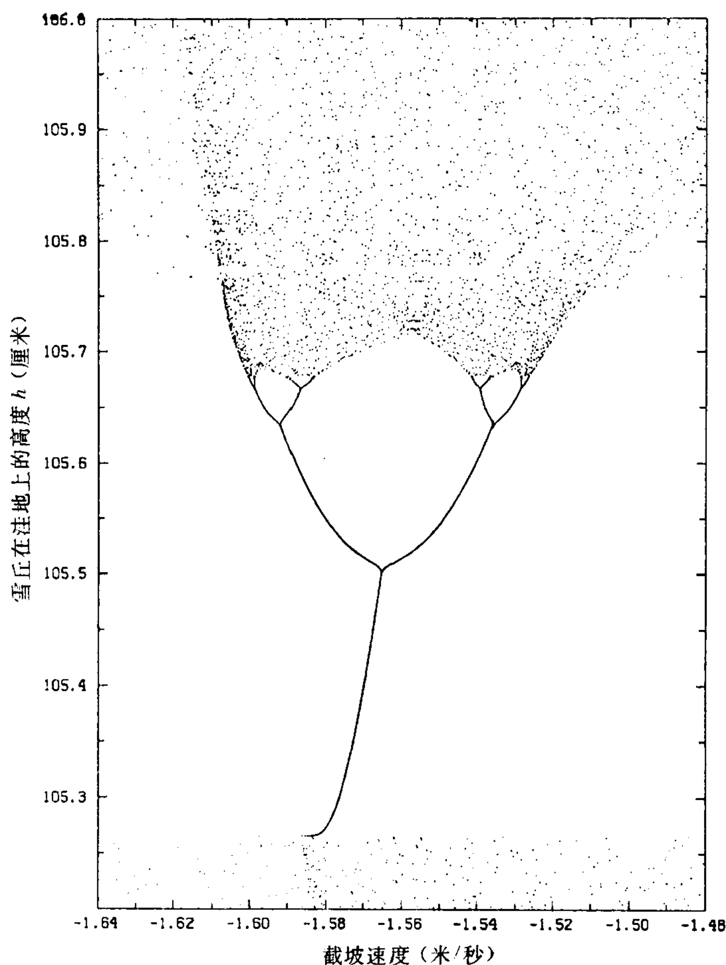


图 27　图 26 中上部的周期窗中某一段的进一步放大图。揭示了一个倍周期分岔系列中的三次倍增

厘米间的窗口上部可见有周期倍增现象。其中左边那段经垂直放大 10 倍、水平放大 15 倍后形成图 27。其中又可分辨出三次周期倍增。不断进入混沌又从中出来，是动力系统族另一普遍特征。

第三章　混沌天气

从预测上说:两种流体一种处理

讽刺天气预报员无能的笑话一直是层出不穷,花样翻新。我就记得这样一个。那是在 1948 年 H. Truman(杜鲁门)在竞选美国总统中击败了 T. Dewey(杜威)之后不久。Truman 击败 Dewey 这件事完全与当时除了 Truman 本人之外的所有人的预测相反。于是就出现了这样一幅漫画,画中有一名求职者在天气局招聘办

公室，接谈者正在向他说："你做过民意测验工作，是吗？那末我想我们可以雇用你。"

且抛开笑话不说，天气预报部门和社会大众都清楚地知道，正式的预报（包括当天的天气预报）有时正好是完全错的。对于通常听到的一个问题："为什么我们不能做出准确的天气预报呢？"我倒一直想要反问："为什么我们一定能够做出准确的天气预报呢？"

确实，我们理应知道未来或者部分地知道未来，为什么那么说呢？首先，我们可以相信，有一组物理规律支配着天气从一个时刻到下一时刻的演变，同时，我们也相信，由于存在着这些物理规律（不管我们现在是否知道它们），天气是应该能预报的。由于我们知道由一些类似的物理规律所控制的其它一些现象已能成功地定期作出预测，这就使我们的信心大大增强，例如海潮，我们能提前几天甚至几年作出很准确的预测。最后，我们的天气预报通常也远比纯粹的猜测要准确得多。

我必须承认，最初遇到的潮汐预报问题曾给我留下一个很不安的感觉。显然我过去一直把高潮和低潮来临时间的通告看成是对事实的陈述，因为其确凿的程度一如昨天海潮来临时间，是不容怀疑的。但是，它们显然是预报而不是事实，就此而言，诸如出现在天文年历上的日出日落时间这样的"事实"也是预报。年历上的日出日落时间只不过是准确率几乎为100%的高概率预报，但不是事实，因为一个未曾预料的宇宙灾变（例如小行星碰撞）就能使这种预报变得完全错误。即使没有这种灾变，这种预报也有可能与事实不符，例如环绕地球的西风带的强度不定期地稍有增加或减少，必然要引起地球转速的一个小的但可测量到的减小或增加，这样，日出和日落的时间可能要被推迟或提前1毫秒左右。

我们回到海洋来谈，为了与大气比较，在一个个海浪被平均掉以后，我们把某些固定的参考高度以上的海表高度定义为海潮的高度。尽管有时我们比较关心将来是否会下雨，但是天气要素的预测或许对我们更有兴趣。所以，我们现在就将上述定义海潮的可预

报性与气温的可预报性作一比较。

大气和海洋两者都是全部或大部包围地球的大范围的流体，它们各自遵循的一些物理定律都十分相似。这两种流体的运动一方面在内部物理过程的作用下受到抑制或被削弱；另一方面它们又受到（至少间接地受到）周期变化的外部因素的驱动。简言之，大气和海洋都是一个非常复杂的强迫耗散的动力系统，因为大气和海洋通过海平面相互接触、相互影响，因此，或许更确切一些应把大气和海洋称为一个大的动力系统的两个组成部分。随着系统状态变化而变化的大气风场既可以形成大部分的海浪，又可以驱动像墨西哥湾流那样的海流。同样，也随着系统状态变化而变化的海洋的蒸发可以提供给大气大部分的水汽，水汽接着凝结并最后以雨或雪的形式落到地面。既然大气和海洋如此大的相似，那么，为什么海潮预测会比天气预报做得更好呢？难道海洋学家比气象学家更有能力？我作为一名气象学家并且有不少亲密朋友是海洋学家，不能同意这样的说法。

就以周期的外强迫来说吧，它主要是太阳辐射以及太阳和月球的引力。照理，大气和海洋在这些周期的外力作用下也会有周期振动的响应。但是，如同许多动力系统那样，大气和海洋的周期振动将伴有一些附加的不规则的特性。在海岸附近，海洋对于外强迫的规则响应包括大部分的潮汐，而不规则的响应包括由于不可预测的强风所引起的异常的海洋高潮。大气对于外强迫的规则响应包括冬夏之间、日夜之间的正常的温度差异，而不规则的响应包括持续的高温和低温天气以及通常伴有穿过海洋和大陆的强风暴所引起的温度的突然变化。

看起来，我们在做海潮预报的时候多半是预报那些规则的可预报的响应。当然，我们也希望预报一些较小的不规则的响应，即使做不到这一点，我们通常也做出了很好的预报。可是，我们在预报天气，例如在预报温度的时候，通常认为那些规则的响应是已知的。正如我们大家早已知道夏天比冬天暖和，这些是不必预报的。

我们要预报的恰恰是依据简单的气候所不知道的那些不规则的响应，所以，当我们比较海潮预报和天气预报的时候，我们要把断定为规则性的或较少不规则性的现象的预报与纯粹不规则性的现象预报加以区别。如果说海洋学家比气象学家聪明，那末他们聪明之处在于他们挑选了一个容易解决的预报问题。我还要补充说明的是，说实在的，大多数的海洋学家不是海潮预报员，大多数的气象学家也不是天气预报员。与大气科学一样，海洋科学在许多方面也面临着许多挑战。

下面，我们把大气视为一个复杂的动力系统，并且提出理由使你相信，大气的不规则性乃是混沌的表现。在一个简单的概述以后，我们将列举多种途径以确认混沌的存在。最后，我将分析大气混沌行为的某些结果。

从气象上说：一种流体两种处理

混沌的动力系统有的复杂有的简单。在滑雪坡道上雪橇滑行的数学模式虽然只有三个变量，但它足以说明混沌的许多特性。当然，它还决不是最简单的混沌动力系统。最简单的动力系统是只有一个变量的动力系统，它是在所有混沌动力系统中被研究得最为广泛的一个。它的变化能定义一个映射并满足一元二次差分方程。

这个系统是如此之简单，以至我们用袖珍计算器在几分钟之内就能确认出该系统具有混沌行为。任选一个固定的数，就叫它为c。在$-c$与c之间选一个数作为数列的首项，数列的其余各项均是前一项的平方减去c得到的。若c选在1.4到2.0之间，则按上述方式构成的一些数列（并非全部）没有周期性。利用一个选择的c，但数列首项选得稍有不同，那么重复你的计算就会发现，得到的数列非常敏感于初始数的选择。这个系统稍稍改变形式就是著名的Logistic（逻辑斯谛）方程，它一直用在人口动态变化的研究中。

具有大量变量甚至无穷多个变量的系统则属于另一种极端情

况。在这些系统中，我们可以期望找到其状态正好是全球天气流型的系统，我们就称它为全球天气系统。

气象学家在创造深奥的术语以描写深奥的概念方面一直与他们的同时代人同步。例如，他们创造了假相当位温、湿半地转和动力反气旋生成等词语，同时，他们甚至创造了三重缩写词，大家知道 GARP 为全球大气研究计划(Global Atmospheric Research Program)的缩写，这是在 1960 年创立并在 70 年代和 80 年代蓬勃发展的多国研究计划。可是，现代气象学家用 GATE 表示 GARP 的大西洋热带试验(GARP: Atlantic Tropical Experiment)，而用 GOCC 表示 GATE 的业务管理中心(GATE: Operational Control Centre)。不过，全球天气系统中的变量并不是深奥的量，它们只是一些我们十分熟悉的使我强烈感到它们的存在的天气要素。只要我们一走出户外，我们往往就能大略估计出这些气象要素值的大小，这些气象要素就是温度、风、湿度以及我们头顶四周的云和可能降落在我们身上的雨或雪，此外还有气压，气压虽然较少直接影响到我们的舒适与否，但它在许多天气报告中是一个常用的量。当我们开车沿一陡峭的高坡下来时，我们能容易地发觉气压在上升，但是我们大多数人在早晨醒来时却很难说出气压比睡觉的时候是高了或是低了。湿度能用相对湿度、湿球温度、露点或水汽含量来表示；这些量中的任一个量与气温和气压相结合就可以确定出其它的表征湿度的量。

如果我们生活在一个行星上，而行星大气是由一种纯的气体均匀组成的，那么我们此时只需注意温度、风和气压。我这里所说的风指的是三维的风，它有一定强度的上升或下沉运动的速度分量。且不说太阳系中的其它大气，单就我们生活的地球大气来讲，它是比较复杂的，它的一个最重要的组成部分是水汽，不过水汽含量变化很大，在潮湿的热带大气中，通常水汽的质量比大气质量的 2%稍大一些；但在高纬或高层的冷空气中，水汽质量比大气质量的 1‰还要小。在大气中水还能以悬浮或降落的液体水和固态颗

粒的形式存在，所以实际的地球大气并非全由气体组成。因而系统的变量必须包括水汽含量即我们所觉察到的湿度，还应包括液态水和固态水，也就是我们所观测到的云的密度和降雨或降雪强度。在这些变量中或许还应包括灰尘和烟等污染物质的浓度。

我们还可以为系统增加更多的变量，但是大气作为一个动力系统之所以如此复杂，其原因与其说是物理变量的增多，毋宁说是这样一个事实，即：这些物理量的值不仅从一个时刻到另一时刻会发生变化，而且从一点到另一点也会发生变化。当然，从理论上讲，要知道全球天气系统的某一时刻的状态，就必须知道每个变量在每一点上的值。因为大气显然有无穷多个点，所以，看来系统也应有无穷多个变量。

不过实际并非如此，这是因为在十分细的空间尺度上，气象要素的变化是相当平缓的；如果在足够密的网格上相邻网格点上的两个值近似相同，那末它们在相邻网格点的中间位置上的值也近似相同。所以，比较合理的做法是把大气处理为有限个变量的系统，并可得出结论说大气是紧致的。当然，也不是说变量数目越小越合理；事实上，变量的数目还是相当庞大的。

那么，我们该如何解决这样一个复杂的系统呢？让我提出两种方法，在 20 世纪中叶，计算机出现并引起每一件事情发生改变之前，这两种方法已被承认，并且每一种观点都有它自己的热心支持者。这就是动力气象学和天气学两种方法。

首先论述动力气象学的方法。比较准确地讲应称为气象的动力学方法，人们了解它已有 100 年左右。动力气象学家认为大气的状态是由气温、风和其它天气要素的空间分布构成的。他们从控制大气运动的物理定律出发，并且经常将这些定律用数学的方程组来描述。这些物理定律之一就是人们十分熟悉的牛顿运动定律，即：“力等于质量乘以加速度”，不过在气象学中的牛顿定律常变为“加速度等于力除以质量”或“速度的变化率等于每单位质量的力”。利用我们对大气状态的了解，我们能够在原则上估算在任一

点上所受的力，从而能够知道通过每一点的速度及其随时间的变化，热力学定律将告诉我们温度如何变化，其它的定律将控制其余变量的变化。总之，预测天气演变并更一般地把大气处理为一个动力系统都是有着动力学的依据的。

其次叙述天气学的方法。天气学家有一个与动力气象学家十分不同的看法，他们认为动力气象学家的描写是非常不全面的，也可能很不切题，天气学方法研究的是大气状态可以按此分析的特征结构。这些特征结构包括中纬度环绕地球的弯曲的急流、次大陆尺度的涡旋（它也称为高压和低压系统，简称为高压和低压），这些涡旋在中高纬度穿过海洋和大陆，并且引起逐日的天气变化。这些特征结构还包括低纬度的小的和较强的涡旋，按照它们的发生地而被称为飓风、台风或热带气旋；还有塔状积雨云及伴有的雷暴和偶发的龙卷风；还有分散在晴空中的小块云。上面提到的这些特征结构的典型的水平范围分别是 10000、1000、100、10 公里和 1 公里或再小一点；这里我们给出的只是一个范例。每种类型的特征结构尽管能够重复地出现，但每个个别的特征结构都有其自身的特性，这正像人种是连续的，但不同的人有着不同的个性一样。天气学家用以识别和研究较大特征结构的主要工具是天气图。

在计算机出现以前业务预报人员事实上是一位应用天气学家。个别的预报人员可以凭他们自己的经验和前人的经验去判断每个特征结构一般应如何发展和移动，他们将会发现：一个特征结构中的某些异常可以是一些突发事件的先兆，这样，他们就可以发现新结构出现的征兆和旧结构（消亡）的遗迹。例如，他们发现：一个高压和一个低压看起来似乎要移向同一位置，但实际他们各自保留自身的特征彼此反向移动，而不是相互削弱。预报员在准备做预报时通常比较喜欢画一张预报图，这是他对下一个时刻天气图的个人估计，然后用预报图去预报局地的天气状况。

实际上，预报规则之于天气学家正如同物理定理之于动力气象学家一样。如果这些规则经数学归纳后能对任何可想到的状况

给出唯一的预报，那么这些规则就确定了一个可代用的数学模式，这一模式构成了另一个动力系统。

且不谈传统，那么在 20 世纪中叶，实际的预报员为什么不能应用动力气象学的方法呢？最可能的原因就是主要根据动力学方程从未得到过满意的天气预报。

那么，动力气象学家作了相当多年的努力主要取得哪些结果呢？动力气象学家是科学家，而不是技术专家，他们的兴趣主要是根据控制大气运动的物理规律去真正地了解大气，他们乐于揭示为什么一个有特殊个性的天气型会像它过去那样演变？他们更有兴趣的是要了解天气型为什么每天都不一样？为什么这些天气型都被天气学家称为的大尺度涡旋所充满？他们力图知道是什么物理过程使这些涡旋得以发展和维持一段时间，而普遍存在的耗散过程经常会破坏这些涡旋。到 20 世纪中叶，动力气象学家已找到不少答案。

我并不认为天气学家是技术专家而不是科学家；说实话，我也不认为技术专家比科学家低一等。解决问题的单一途径往往并非是唯一的有效途径。天气学家对用大量资料去研究所观测到的特征结构的性质和建立相邻特征结构之间的联系有着强烈的科学兴趣。他们也不怕检查他们的发现是否与物理定律一致，但是，他们的最后结论往往是根据天气型的大量资料所作的认真分析得到的。

我并不是想说掌握动力气象学和天气学就等于掌握了气象学的全部。气象学除天气学和动力气象学外还有许多科学分支，每个分支都有它自身的许多专家。举两个例子说，一个是云物理学，其中一个基本的概念是云中水滴大小的分布，并且要研究云中悬浮的小水滴和小冰晶转变为大水滴和大冰晶然后再落向地面变为雨和雪的过程；另一个是仪器测量学，其中人们要研究各种仪器的优缺点。利用各种仪器，我们已经获得了许多有关天气的知识，我们还要设计新的仪器以得到迄今还难以获得的大量资料。

动力气象学和天气学不是完全脱节的。已经有一些气象学家对这两大分支都很熟悉。在高等气象研究部门，动力气象学和天气学的研究配合得较好。但是，也有一些别的研究机构，在应用数学部门出现了不少优秀的动力气象的科研成果，而在地理学部门也会有一些天气学方面的优秀工作，不过这些部门之间是很难建立联系的。在 20 世纪中叶，气象学的历史就是以这两种方法论之间的合作和争论作为标记的。

不能完成的实验

在一个具体的系统中，不管它是在一定坡度上下滑的物体还是拥有许多相关特征结构的大气，寻找混沌的最直接的方法是研究系统本身。如果我们抛出一个纸板并对其行程进行监视或照像，那么我们很容易确定它的路径，然后再在几乎同一个点上抛出它，以观测它是否有同样的轨迹。不过，我们不可能去做以下这样的实验：中止天气的进程，然后重建早先已观测到的天气，目的是为了使它稍微受到扰动以考察得到的天气与早先的天气的差异增长速度。不能进行这样的实验对科学实验是不幸的但或许对人类还是很幸运的。当然，我们很容易对当前的天气进行干扰，如使用爆炸或开炮进行猛烈干扰或把干冰放到云里面（或者甚至放一只蝴蝶）进行平缓的干扰，我们就能观测将会发生什么事情，但是我们仍然永远不会知道在没有人工干预的情况下天气将如何变化。

我们可以将干扰后的天气与未作干扰所预报的天气作一比较看看会怎么样？因为预报是依据不完全的观测资料进行外推得到的，所以，它至多只能告诉我们当施加的扰动在大小和结构上与观测误差（初始场误差）相当时可能出现的情况。要想施加的扰动能使我们获得更多信息的话，那么这样的扰动必须足够大而不致于被观测误差所淹没。但是，整个的雷暴都可能在观测站之间被漏掉，由此看来要产生这么大的扰动是很困难的。

既然我们没有能力去改变天气以适合我们的需要，那么我们只能寄希望于气象学家所称的相似（即与早先观测到的天气类型非常相似的天气型式），希望通过相似以考察紧接在两个相似天气型式之后的天气是否也非常接近。但是这个方法也不灵，这是因为即便大气是一个简单的系统，但是要在这个系统中找到一对在全球范围内非常相似的天气型式，这在几十年的全球天气记录中从未发现过。在大陆尺度区域上非常相似的天气型式有时也可能观测到，但是它们也未必相似地演变，这是因为不相似的天气特征结构已从邻近的区域移入的缘故，而不是由于对于小的局地差异的敏感性所致。

但还是有充分可靠的观测表明天气变化不是周期的。当然，天气变化也有周期的成分，最显著的周期性是变暖和变冷总是呈现季节的周期性或一天内的周期性。或许由于引力的作用，仔细的观测也已经发现天气变化具有月亮运行周期（可能由于重力的影响）的微弱信号，而且研究者们已声称他们发现的周期实际上是无限多的。其中有一些已被精确到小数点后数位。然而，如果把温度或其它天气变量的记录拿来，并扣除被认为是周期的成分，那么剩余的是强烈的不规则的信息。此外，穿过海洋和大陆的移动风暴仍然非常强劲，这些或许也是混沌的表现。

因为全球范围内天气类型的非常相似尚有待发现，所以我们不能断然排除样一种可能性，即：当这种相似终于出现时，后续的天气将重复早先的天气演变。也就是说，大气的行为可能真有周期性，只不过这种周期的长度超过了任何天气记录的长度罢了。我们所得的强烈印象是大气运动是混沌的，但是我们期望有更多的证据。

来自转盘的声音

我们可以很容易地建立一个包含崎岖不平坡度的按一定比例

缩小的模型，并在这个模型中观测一个球或其它物体的下降过程。但是要在实验室中模拟行星大气则是另一回事了。我们可以设想把某种流体充满于两个同心球之间，其中内球表示一个行星，而外球则起到了使流体不至脱离行星的重力的作用。但是，我们怎么能做到在流体内所模拟的重力永远指向行星的表面呢？

实验室模拟的倡导者已经非常熟悉动力学。动力气象学家长久已来已习惯于在应用方程组以前先对它加以简化。有时，这种简化仅仅是删除方程中的一些次要的项，但有时候这种简化往往忽略或大大改变了某些物理特征或过程。因此这种简化实际上是用另一种大气来代替真实的大气，这简化的大气就是由 N. Shaw（肖）在 20 世纪初期在他所著的 4 卷本《气象手册》中作为一种神奇的故事所描写的大气，可是今天我们已把它称为一种模式了。动力气象学家假定或者至少希望由模式所模拟的天气在总体特征上或多或少地与实际天气相像，只是在细节上有所不同。

建立能表征大气中水蒸发和凝结规律的方程组是比较难的，而建立控制由细小的悬浮水滴的云转变为降水云的方程组更是难上加难，不过，动力气象学家构造的模式大气中往往是不包括任何形式的水的。同样，许多动力气象家也不大喜欢球面几何，他们宁愿用表面为平的旋转地球来代替表面是弯曲的地球。任何一个动力气象学家都能解释在干洁大气和扁平地球所组成的理想环境中大尺度涡旋的发展和维持，他们会觉得大气模式能够完成求解实际问题的大部分工作。

实验室的设计者非常清楚，他们在实验室安装的设备也一定会失真的，这与动力气象学家按传统构造的方程组会失真是一样的。第一个富有成果的实验是由芝加哥大学的 D. Fultz（富尔茨）设计的。在做了大量的试验以后，Fultz 设计了一个部分注满水的柱形容器，把它放在旋转的台子上，并在容器的四周附近加热，在中心附近冷却。图 28 是 Fultz 装置的示意图。其中容器的底部是用来模拟地球表面的一个半球，水是用来模拟地球上的空气的，转

盘的旋转用来模拟地球的旋转，加热和冷却是用来模拟在低纬大气的净加热和在高纬大气的净冷却的。而重力是靠自身模拟的。Fultz 希望在水中发展起的运动类似于大气中的大尺度流型。

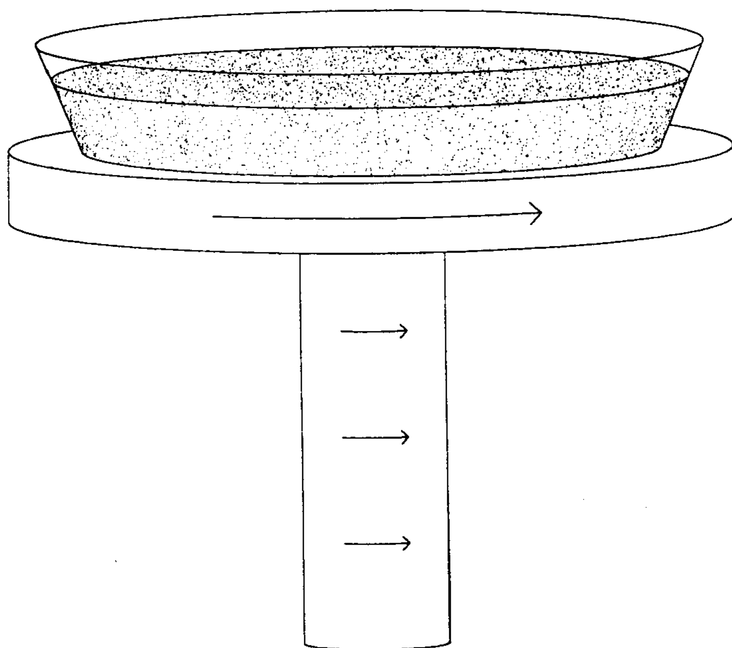


图 28　在转盘实验中 Fultz 装置的示意图。箭头表示转盘旋转的方向，加热在容器的外缘，冷却在容器的中心

原先，容器的边缘一直延伸到超出转盘的外缘，而加热装置是一个固定的本生灯（一种煤气灯），暴露在室温中就被当作了冷却。后来，加热装置采用了易控制的安装在容器四周的加热线圈，而冷却装置是转盘中的小孔喷出的一股向上的冷水流。用来模拟高层大气运动的上表面水的流动是加入少量的铝粉来观测的。安装了一台与转盘一道旋转的特殊的照相机作定时的摄像，这样，铝粉的运动在像片上为一段段痕迹，有时候每次曝光结束时有一闪光，它

使得在每段痕迹的前端加了一个箭头。水在深层的流动可以通过在深层水中注入的染料来观测。温度表经常插入水中以记录伴随模拟的天气特征结构的通过预期会形成的温度起伏。转盘一般作逆时针旋转，这与从北极上空所观察到的地球旋转方向相同。Fultz 装置元件的总费用大约为 4 万美元，这在 1950 年是一笔相当可观的数目，但是中枢装置转盘是只花了一两美元买来的，Fultz 的工作即是大家所熟知的转盘实验。

Fultz 认为不管实验所用的流体是气体还是液体，结果都不会有什么差别，但水肯定是一个最简便的选择。水不含任何杂质，可以用来模拟实际大气的水汽和云，而转盘的底部实际上是平的，因而无法区别海洋和陆地。因为在大气中未考虑水和地球曲率而一直受到批评的动力学家们可能会宣称说：他们实际上正打算模拟转盘实验。

因为在转盘实验中事事都被安排为关于旋转轴是对称的，至少在实验室控制的范围内是如此，这样，人们很自然地想到，模拟得到的流型也必然是对称的，看起来或许很像图 29 所表示的。Fultz 则希望模拟的流型多少有点像图 30 所表示的那样，包含一个弯曲的急流和一组典型的大气涡旋。

Fultz 得到的结果比预期要好。两种流型都会出现，出现哪一种取决于转盘的旋转速度和加热强度。简单地说，当加热固定时，随着转盘旋转速度增加而超过一个临界值时，对称环流将向非对称环流转换；而当足够大的旋转速度固定时，随着加热强度增加达到一个临界值时，类似的转换将发生，即也是对称环流向非对称环流转换，但当加热强度继续增加而达到一个更高的临界值时，非对称环流将回到对称环流。实验可以重复进行，按上述的旋转速度和加热强度加以组合，转换就能发生。

在早期的实验中，出现的非对称流也似乎是不规则的，它常从一种流型连续地变为另一种流型，这与实际大气的变化非常相似。我们现在把 Fultz 实验中的流型转换看作是两个系统之间的典型

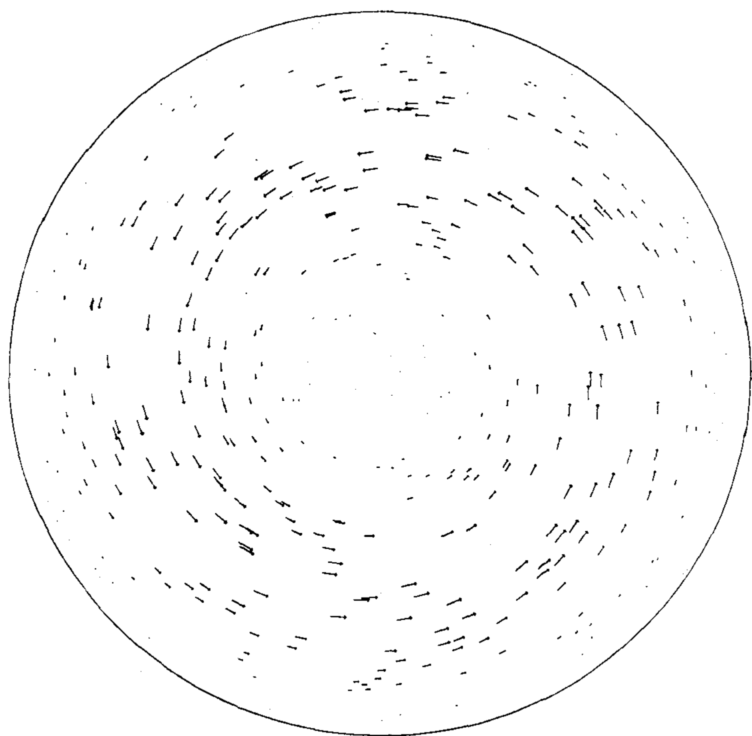


图 29　在转盘中水的上层表面对称流示意图

的分岔，一个是定常系统，它的吸引子是相空间中的一个单奇点；另一个是非定常系统，它明显地是混沌系统，它的吸引子是由多维流型的无穷多个子集组成的。

差不多与 Fultz 同时，R. Hide(海德)在英国剑桥大学利用一个类似的装置进行了实验。主要的不同是实验的流体位于两个同心柱之间的环形区域而不是在一个柱体的内部，Hide 的实验同样存在对称流型与非对称流型之间的转换，不过，或许是因为内柱的限制作用，Hide 实验中的非对称流经常是规则的，并且它由一串环绕圆柱运行且不变形的波所组成。这里可以看作是一个具有一维吸引子的动力系统，在一个适当选择的相空间中，这个吸引子就

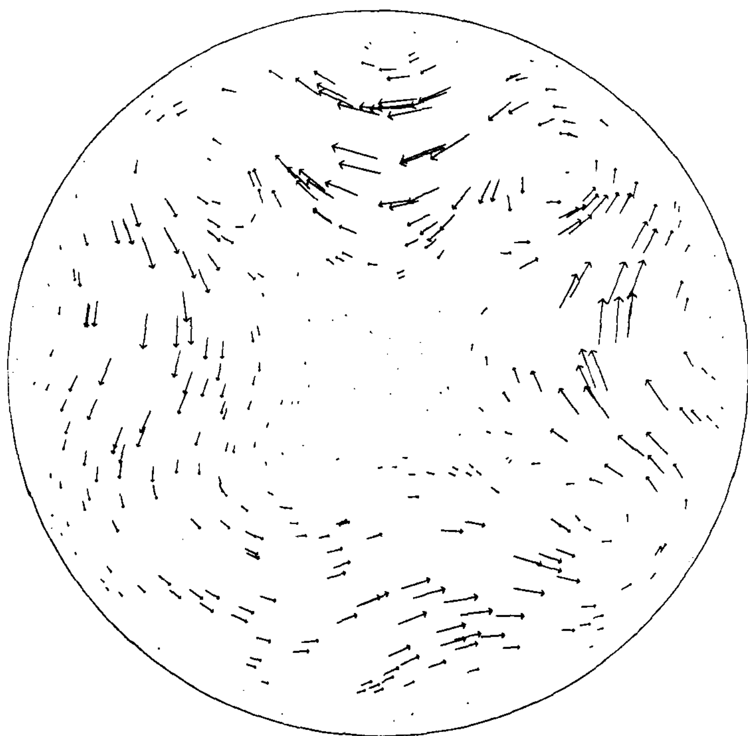


图30 在转盘中水的上层表面非对称流示意图

是一个圆。在 Hide 实验中隔开的状态只能通过波的经向位置来区别。

Hide 的实验也揭示了一个显著的规则的现象，他称之为摆动。这里也有一串相同的波出现，但是随着这些波的运行，它们按一个正常的周期方式统一改变自身的形状，并且在许多“天”以后，也就是转盘多次旋转以后，它们将再现原有的形状，然后再次重复循环。这里的系统有一个两维的吸引子，两个变量是波的经向位相和摆动循环的位相。

Hide 原不是一个气象学家，虽然他从此成为气象界的第一流的动力学家，并且当时他已着手模拟地球磁核的运动，但是，作为

一个知识非常广泛的学者，他很快看到他的实验与大气运动的关联，并且注意到他实验中的摆动与大气经常看到的强、弱西风之间的摆动非常相似。他赶紧与Fultz交流信息。终于，Fultz在他的转盘中同时产生出周期的波运动和摆动，而Hide也发现，他自己的装置也会产生不规则的现象。

跟在Fultz和Hide之后，其他一些科学家也立即开始了实验模拟，不过，与继续热心于方程组的科学家相比，参与的人数还是比较少的。A. Faller（法勒）使用了像报废的唱机转盘那样的元件，设法用4美元再现了早年Fultz所做的实验。接着，他在Woods Hole（伍兹霍尔）海洋研究所造了一个直径为8英尺的转盘，在这个转盘中能产生冷锋和暖锋，在大气中这是隔开有显著温差的大范围空气团的狭窄地带，在实验中即是隔开明显温差的水团的狭窄地带。锋是海平面天气图上普遍存在的特征。

图31是Fultz通过照像获得的一个摆动循环。4张图是在四个“转盘天”的时段中拍摄得到的，在第一张图（左上图）中最亮的条纹表示一个弯曲的绕极急流，它看起来是由五个实际相同的波组成的。这些波不断改变它们的形状，在8“天”以后（左下图）它几乎已转变为圆形的涡旋。这些涡旋不断伸长，到16“天”的时候（图未给出），其图像几乎与初始时的完全一样。

图32是隔了1“天”的转盘的两种像片，这是在不规则运动期间拍到的看起来像是混沌状态的流动。同时附有根据像片由Fultz所作的流线分析。可以看到在中心下方的一个几乎是圆的涡旋（箭头所示）在向东传播的过程中明显伸长。而涡旋本身是反时针旋转的，它很像北半球实际大气的低压中心。

图33中的第一张流线分析图是把图32中的流线反向绘制成的，目的是为了模拟南半球大气的流动，将它与一张实际的南半球高层天气图（右图）的流线相比较，两者非常定性地一致。尽管流型不重合，但两者像得可以认为它们是从同样的吸引子中挑选出来的。

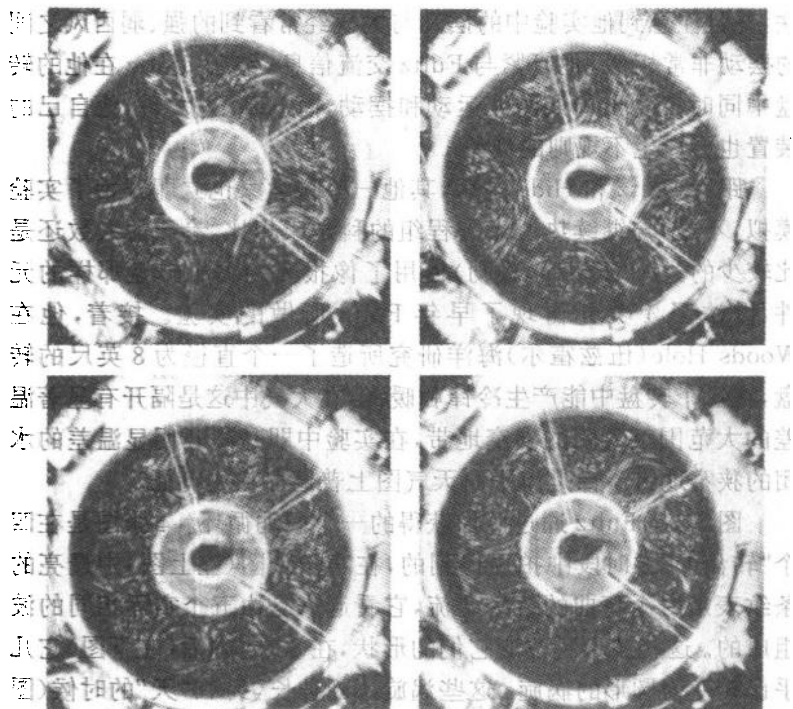


图3 在转盘中由 D. Fultz 摄得的在摆动循环期间上层流动的四个阶段的像片。依次为上左图、上右图、下左图和下右图，它们分别表示开始、经过 4 转、经过 8 转和经过 12 转的图像。经过 16 转以后的图像与原先的几乎一样，图中未给出

模型实验的意义是非常深远的。从实验看到，急流、移动的涡旋以及锋可以认为是旋转加热流体的基本特征，而并非大气所独有。动力气象学的努力也并不都是永远成功的，人们有时认为失败可能是由于应用了错误的动力学，或是由于我们还未觉察到某种奇怪的力。这样说未必正确，这是因为实际大气和模型实验两者之间的相似和不同强烈地表明：宏观流型相似的主要原因应该在对

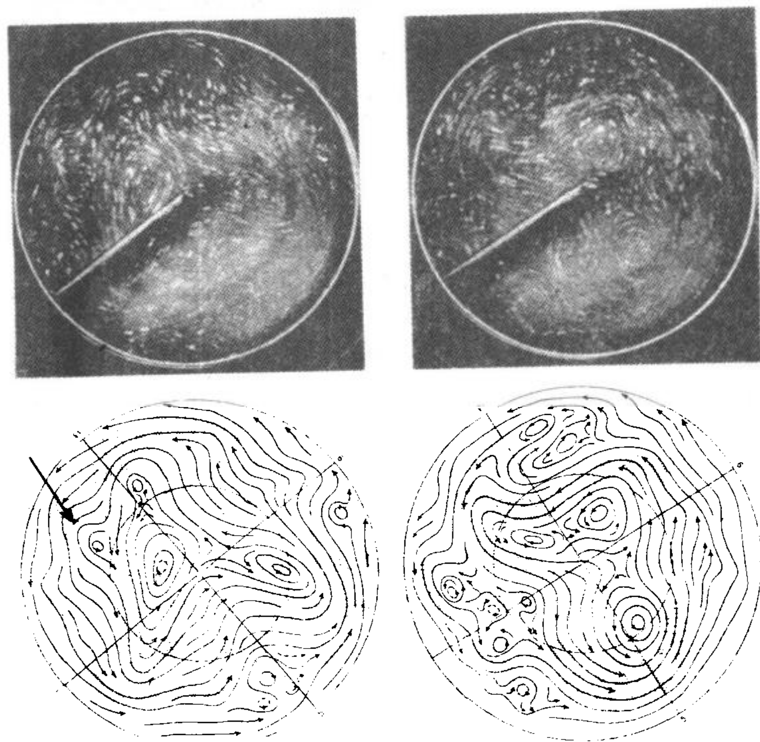


图 32　在转盘中摄到的显示混沌运动的上层流动的图像，并附有根据图像所作的流线分析，右边的图像是左边图像经过一转后的流形。图像和流线分析(Fultz 分析)的引用已经美国气象学会惠许

两个系统都有影响的力和过程(重力、旋转作用和不同的加热)中去寻找，而像可压缩性(空气有但水没有)这类特征只是次要的。因此，如果有一个神秘的力在大气中起作用的话，它也应该在转盘中同样有作用。

最后我要说的是，我们的 1 天约等于 24 小时而不是数倍于此，这可能是史前的一个偶然情况。如果是这样，那末，我们的大气

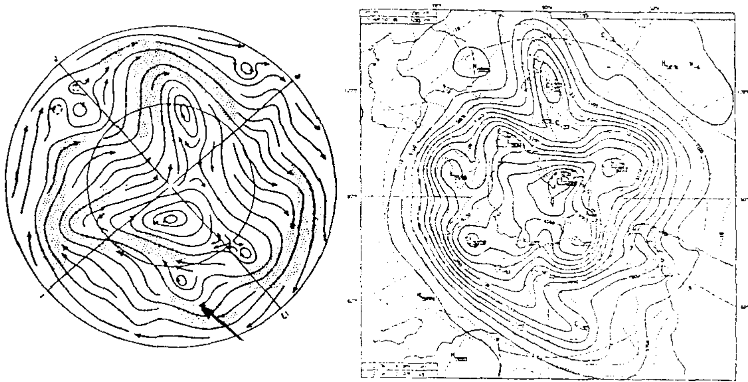


图 33 左图的流线分析是图 32 反向得到的，目的是为了模拟南半球的流动；右图是实际的南半球一部分 500 百帕等压面上的等高线图。在此等压面(其平均高度约为 5.5 公里)上，流线与等高线非常相似

的运动像迅速旋转的转盘而不是像缓慢旋转的转盘，大气变化起伏是混沌的而不是有严格规律的，我们的天气是难以预测的而不是死板地重复着单调的循环或者除了季节的缓慢推移外一切都没有变化，所有这些也可能全是偶然的了。

500 万个变量的动力系统

混沌大气的最强有力的证据来自数学模式。严格地说，这些模式是自动力气象学诞生以来动力气象学家们一直在使用着的，但是，近期以来一个“模式”通常表示可以设法在计算机上求数值解的一个方程组。所以，这类较实际的模式的历史本质上就是应用动力方程组做天气预报的历史。

数值预报的历史是 20 世纪初期在挪威开始的，当时，V. Bjerknes(皮叶克尼斯)(有些人认为他是空前伟大的气象学家)提出天气预报的问题不过是应用一组同时的天气观测资料作为初始

状态去求解表征基本规律的方程组的问题。他认为方程组是已知的，但没有求解的实际方法。许多年以后，也正是 Bjerknes 支持了这样的想法，即认为大陆和次大陆尺度的涡旋和其它的特征结构之所以必然会在大气中存在，其原因并不在于缺少这些结构的流型（它在转盘实验中看起来像对称流并构成一个平衡态）在动力学上是不可能的，而在于这种流型对于大气中水平范围大而振幅小的不可避免的扰动是不稳定的。这些扰动会继续加强并作为该完全流型的一部分而持续下去。

数值预报的下一篇章始于英国，是在第一次世界大战期间。当时，多才多艺的科学家 L. Richardson（理查孙）被这些方程的令人生畏的特性所吓倒，而企图用数值方法求解方程组。在他的方法中，他把气压、风和其它量的连续分布（只要将不同天气站的报告进行内插，总是能估计出），用这些量在规则格点上的值去代替。而这些量的梯度（即这些量的水平变化率）是用这些量在相邻格点上的值的差分去近似。

作为一个教徒，Richardson 反对战争，但他不害怕上前线，而且在战争期间他乐于做一个战地救护车的司机。他选择了某一天的大范围的天气资料随身带着，并且在轮休时，作了无数次的加、减和乘法运算，对一个小于欧洲的区域作了 6 小时的预报。他预报的天气型式不仅被事实证明是错的，而且与以前所出现的任何流型都不像。Richardson 认为他的预报失败是因为初始风的资料有问题所造成的，然而后来的分析指出：即使有完全理想的初始资料，他的方法也会产生虽比先前小一些但仍然十分严重的误差。

我们想像有一个来自外层空间的庞大的怪物突然下落接近地球，伸出握有巨桨的手，在消失之前对大气进行了短暂的搅动。我们完全不谈它对地球上的生命可能有的灾难性影响，我们要问它对天气将产生什么样的影响。

例如本来是一直围绕一个低压系统作正常运动的空气，这时就可能受搅动而大量进入低压。这个低压就会很快填塞而迅速变

为一个高压,之后堆积的空气急剧涌向外,留下一个深的低压。以后空气又第二次进入,然后又涌出。由于地球旋转形成的反复折向效应,上述运动还要更复杂些。在那个庞然怪物使得空气流出一个低压或流入或流出一个高压的地方,就会发生类似的事件。那么,必然会形成气压和相伴的风的高频振荡。理论指出,这个高频振荡的周期(从低压变成高压再变回低压所需的时间)差不多是一天。

看来,大气本身自有办法消除任何这样的高频振荡;否则它就成了我们正常天气的一部分了。机械的和热力的阻尼对于消除这种振荡起了重要的作用。要不了几个星期,这种高频振荡就很难觉察到了,于是天气恢复到正常状态;尽管这时天气型的具体演变无疑已与没有这种扰动时的演变不同了。换句话说,日复一日的正常的天气型乃属于全球天气系统的吸引子。而外来的庞然怪物将形成一个脱离吸引子的新的状态(作为一个初始状态来考虑),不过,与任何一个耗散的动力系统一样,瞬变的效应终究都会被阻息,从而恢复正常的状态。

现在假想,Richardson 曾经希望应用他的数值程序去预测如果这个庞然怪物造访过地球将会发生什么情况。他可能做得不如他曾经做过的那样好。像他应用过的那种天气观测资料以及在标准的地理位置上的内插是包含着许多小的误差的。大气的实际状态与 Richardson 能够作最佳预测的状态之间的不同是与大气被搅动前后状态的不同大致上是相类似的。真正的状态属于吸引子,而预测的状态则不是。不可避免地,Richardson 所预测出的乃是他假定的初始状态所要求的高频振荡。

Richardson 在其 1922 年完成的不朽著作《通过数值过程作天气预报》中,全面而详细地叙述了他的方法,并且讨论了他所作的预报。他在书的最后展望:一个有 64000 人轮流值班的天气中心制作天气预报(指用数值过程做天气预报——校注)的速度可以超过天气自身发展的速度。但他没有预见到,不到半个世纪,人们利用先进的设备可以与 64000 人一样迅速地做出天气预报。

紧随着 Richardson 的努力之后，对数值预报的态度一般变得比较悲观。许多知名的气象学家对于风的观测能准确到足以抑制虚假的振荡这一点持怀疑态度。还有些人虽然不是这样看，但却对数值预报所需要的纯粹的计算量之大感到泄气。

幸亏出现了一位最有信心的科学家，他就是瑞典的 C. G. Rossby（罗斯贝），一位名符其实的动力气象学家，他肯定是另一位空前伟大的气象学家。他的杰出贡献之一是他认为了解大气的关键是风而不是气压。一个低压系统同样也是一个旋转的涡旋，虽然气压表能最易和最准确地测量和反映低压系统的特征结构，但流型对低压系统的行为却可能有着更大的影响，而气压只是被当作一个指示器而已。

到本世纪中叶，著名的数学家 J. von Neumann（冯·诺伊曼）开始致力于设计自动计算机并应用它来解决问题。虽然他不是一个气象学家，但是他认识到天气预报问题是一个无可争辩的需要用计算机解决的问题。他马上东奔西走收罗一批气象学家和其他科学家到新泽西州的普林斯顿高级研究所去解决数值预报问题。除了面临大的计算困难以外，还要解决虚假的振荡问题。

参与天气进程的大气状态全都被认为是限制在全球天气系统的吸引子上；假定任何瞬变的效应早已消失。如果某个方程组被用来作一两天的短期预报的话，那么就必须处理好在吸引子上的状态，或者较好地近似描写这些状态。另一方面，不需要处理不在吸引子上的状态，因为这些状态永远不会发生。

认识这一点的 von Neumann 小组的一个成员是当时年青的气象学家 J. Charney（查尼），后来他被看成是另一个空前伟大的气象学家。在到达普林斯顿以前，Charney 已经认识 Rossby。从 Rossby 的关于风场重要性的思想出发，Charney 设法构造一个方程组的系统，但该系统未能有效地区分不实际的天气型和稍有不同但比较符合实际的天气型，前者预期可能有强的振荡发展，而后者预期不可能有强的振荡发展；Charney 任取其中一种流型作为

初始状态，预测出高频振荡不可能发生。如果真有一个天外庞然怪物来访的话，Charney 的系统是不能觉察出的。这是因为实际上 Charney 的新的方程组滤掉了高频振动，后来，有时把这样的方程组称为滤波方程组，而把 Richardson 所应用的更准确的方程组称为原始方程组。滤波方程组经过各种修正以使其更适合于作数值计算之后，遂成为第一批数值预报试验的基础。这些早期奋斗的历史，已经适当地由 P. Thompson（汤普森）和 G. Platzman（普拉茨曼）详细地叙述了，他们是最早参与数值预报的两个人。

到 50 年代中期，数值预报虽然尚不能与有经验的天气预报员所作的预报相匹敌，但还算是成功的，因此数值预报遂被各国国家天气局引用作为日常预报业务的一部分。至此，至少可以说天气预报员除了他们早先一直使用的预报手段以外，还拥有计算机所给出的信息。预报员可以自行其是地使用或者拒绝使用这种信息。但是，随着时间的推移，预报员终于越来越依赖于数值预报的产品了。

作为动力系统，新的模式是比较特别的。在模式中不存在像实际大气系统那样的吸引子。如果这种模式被用来做长期预报（例如月预报）的话，那么它所产生的天气型式与实际的天气型式将很不相同。这是因为在最早先的预报中外部强迫和内部耗散被完全从方程组中忽略掉了，忽略的理由是，不管强迫和耗散在形成一个初始状态时是如何重要，但它们在一两天内的影响应该是很小的。因此，姑且不谈数值计算可能引起的一些变化，单就这些模式本身来说，是保持总能量守恒的，而且与其它的 Hamilton 系统一样，没有任何吸引子。

考虑到在数值预报模式中未计入强迫和耗散的缺点，它的一个自然发展是全球环流模式。这种模式采用的方程组非常像已用于短期预报的方程组，但是，顾名思义，全球环流模式的区域应该能覆盖全球或者至少覆盖一个半球的大部分，而不是一个比较有限的区域。新的模式的目的是模拟天气而不是做预报。所模拟的

天气的长期行为在许多方面尽可能是逼真的，并且初始条件通常故意地选择得不像是实际的天气型，以期望比较合理的流型能较快地显示出来。换句话说，我们期望新模式包含实际的吸引子。不用说，外加强迫和内部耗散是必需包括进去的。

最早的全球环流模式是由 N. Phillips（菲利普斯）设计的。他一直与 Charney 同在普林斯顿的高级研究所密切地合作。Phillips 的动力系统中有 450 个变量，他扩展他的解到一个月，并且在他遇到计算上的问题以前产生了一个弯曲的急流和移动的涡旋。接着他又成功地找到了计算上的问题并给出了解决方法，这样，他就为后来的无数个全球环流模式的建立铺平了道路。

在 60 年代，过滤方程组非常流行，这样的方程组使得利用早期的计算机做数值预报是可行的，不过，它不能做出人们所期望的高质量的数值预报。随着高效率的计算机的出现，一些气象学家把他们的注意力转回到原始方程组来。在 10 年前被认为是原始方程组不能解决的高频振荡问题现在看来在概念上是非常地简单，尽管实现起来并不那么容易。

根据观测资料内插所获得的初始风场和气压场总是不准确的；否则它们就不会产生比在自然界观测到的振荡要强得多的振荡。下一步为什么我们不可以对初始场作一点修改（即使这种修改有使初始场的精度略微降低之虞）以产生新的初始状态使得高频振荡不会发展，从而替代了仅仅应用不能预测高频振荡发展的方程组呢？在广泛的研究以后，已制定出几种调整方案，改进工作仍在进行中。这种修改或调整的过程称为初值化，它已成为应用原始方程组作日常数值预报工作的一个不可缺少的程序。值得我们注意的是，初值化并不需要形成准确的初始状态，它只是要求形成一个可能是较准确的初值以代替不准确的初值。从理论上说，初值化就是将观测到的状态位移到接近于在吸引子上的某个状态。

到 70 年代，全球环流模式的设计者也转向原始方程组。随着时间的推移和计算机的愈发高效，使得全球环流模式和数值预报

模式之间的差别趋于消失。在业务预报中心，现在已能够应用覆盖全球或者至少是覆盖半球的模式，并且这样做是有充分的理由的，这是因为人们对几天的预报有日益增长的兴趣，而在几天的时间中风暴能够从很远的地区移来。

就我个人来说，最熟悉的大气模式是位于英国里丁(Reading)的欧洲中期天气预报中心的业务用的数值预报模式。欧洲中心是许多欧洲国家的气象局联合创办的。顾名思义，其使命是做中期预报，也就是做 10 天以内的数值预报。在欧洲中心工作的科学家或者直接从事模式的研究，或者从事与模式设计和运转有关的工作，他们当中不仅有来自成员国的代表，而且还包括来自世界各地的访问学者。

该模式本身是全球的，并且与现代大多数的模式相像，它是在原始方程组的基础上建立的。或许我不该称它为该模式，这是因为在这 10 年左右的期间(在这期间我断断续续地同它打交道)人们为了改进它的性能而不断地对它进行修改。在 1985 年，模式包括很多物理量，其中的温度和风的两个分量等三个物理量在 19 层的每一层上都有定义，第四个物理量是水汽含量，它除了最高的一层外，在其它各层均有定义。气压只在最下一层以显式定义，这是因为当在中间层的温度和湿度已知时，各较高层的气压可以由较低层的气压推出。其它像土壤湿度等次要的变量只在合适的地点定义。在每层的每个物理量为了实际的目的跨越全球的多于 11000 个的格点上逐一给出。这样，模式就可包括一个总数大约为 80 万个变量。

这样仍然不够，到 1991 年后期，经向和纬向的分辨率均以加倍提高，从而使有效格点成为 45000 个，标准层数增至 31 个。这样，便有了一个含 500 万个变量的模式，现代全球环流模式即是如此组成。

可能有人会认为一个包含 500 万个变量的由 500 万个联合方程所组成的方程组是否有点过份了，但是我们必须注意，如果水平

网格不足5万个点，则每个点大约占有多于1万平方公里的面积，这样一个面积大得足以漏掉一个雷暴。我在欧洲中心已经听说有人推测该模式的进一步扩展不会马上实现，这充分说明，并不是所有重要的天气特征结构都能很快被分辨出来。

混沌是怎么回事？几乎所有的全球模式，除了非常早的模式以外，都已经作了可预报性的试验。在试验中对来自稍稍不同初始条件的两个或多个解都检查了有无对初始条件的敏感的依赖性。我们的兴趣并不在于混沌本身，而在于分析做中期预报，特别是做两星期的预报的可行性。

几乎没有例外，所有的模式都指出：初始小的差别都将被扩大，一直到它们不再小为止。甚至在扩大速率上也有很好的定量上的一致性。只要我们不是坚持认为欧洲中心的现有模式以及华盛顿国家气象中心和其它中心的类似模式尽管能做出较好的短期预报，但却并不真正代表大气的行为，那末我们就只有得出这样的结论：大气本身是混沌的。

结　论

探讨物体在斜坡上呈混沌状下滑的可能性主要只有学术理论上的意义，但大气运动的混沌性则有着意义深远的影响。

它的最明显不过的影响是限制了我们的预报能力。现在想像你是一个计算机时代的预报员，并且你不是只做一个中长期预报，而是要做12个中长期预报，于是你取了大体上相似的12个初始状态，它们彼此的差别不超过通常对实际初始状态进行估计所产生的误差。例如，在某些点上的温度可以相差1度左右，而风速可以相差2节或3节(1节＝1海里*/小时)。为了去除预计会出现的虚假高频振荡，你对每个初始状态进行初值化处理，在根据每个

* 1海里＝1.852公里——编者注

初始状态使用你的计算机所能够作出的对真实物理规律的最佳近似做两星期的预报时，你将会发现，由于对初始条件的敏感的依赖性，这 12 个预报，结果都不很像。如果你没有任何根据说 12 个初始场中哪一个是正确的话，那么你也没有根据说这 12 个预报中哪一个应该作为正式预报。

你所要实现的上述过程并不是某些人的不切实际的幻想。它预示着在计算机已经愈益先进的时代，未来的预报方法将会是什么样的。这就是初始条件任意选择的 Monte Carlo（蒙特卡罗）预报。这个名称来自一个著名的 Monte Carlo 赌博娱乐场。因为赌博的最初思想是：在无穷多个合格的初始状态中，少数初始状态应该是随机选出的。但是现在看来，这种方法如果用于日常业务的话，其初始状态可能是人为挑选的。自从用计算机作为产生统计分布的工具以来，Monte Carlo 方法实际上已经在很多领域中应用。

Monte Carlo 方法使我们对做一些特殊天气的预报的可信程度有所了解。如果这些预报彼此之间很少相似，那么这些预报的可信程度是很低的，不管其中的一个预报被任意选为正式预报，抑或是用它们的某种平均作为正式预报。相反，如果这些预报彼此之间非常相似，那么这些预报中的任何一个都是可信的。

选择 2 个星期作为预报时限的根据是什么呢？为什么 2 个星期以后的预报会有显著的不同呢？那还要追溯到 60 年代初，当时，制定全球大气研究计划的准备工作正在进行，这个计划是一个国际性的计划，其目的在于取得全球范围内的高质量的观测资料，并扩大我们对大气动力状态的了解，以使这些新资料得到最佳的应用。制定全球大气计划的最初目的之一就是较好地作出 2 个星期的预报。这样一个庞大的计划显然需要巨大的资金，因此，“目标”或许应该看成是“销售宣传要点”的一种委婉说法。

正好在这个时期一些气象学家开始认识到大气行为对初始条件的敏感的依赖性。组织全球大气研究计划的领导者之一的 Charney 认为在能够做出第一个 2 周预报之前，可能 2 周预报被

证明是不可能的，因此他把制作2周预报的目标改换成确定2周预报是否可行。1964年在科罗拉多州的Boulder(博尔得)举行了一个特殊的会议，一大批动力气象学家、天气学家和包括所有当时活跃的全球环流模式设计者在内的其他气象学家参加了会议。会议的议事日程包括10个国家的代表提交的科学论文。Charney在会上论述了大气混沌行为的可能性。但是，在休会期间(那通常是会议的实际工作时间)，Charney设法说服所有的全球环流模式的设计者，要他们应用他的模式去作数值试验，对根据稍有不同的初始条件做出的一对对预报检查它们对初始条件的敏感的依赖性。根据在以后的几个月完成的这些试验，Charney的委员会得出结论说：对于温度或风场小误差平均增大1倍的时间所作的合理估计是5天。

这个增长1倍时间立刻成为可预报性的标准度量。如果我们对初始场估计误差的大小有一个基本概念，并且如果我们已经确定在预报中能够承受多大的误差的话，那么我们就能够知道误差加倍增长多少次是可以接受的；而且，如果我们也能知道典型的加倍增长时间的话，那么，我们也就能够估计能接受的可预报性的时间范围。因为在典型的误差成为中等强度以后，增长速度将会减慢，所以能接受的可预报性的时间范围还能再向上提高一些。5天的加倍增长时间看来为做一周预报提供了大有希望的前景，但是做一个月的预报就几乎一点希望也没有了，而2星期的预报似乎是模棱两可的。

当更强大的计算机可以用在气象领域的时候，通常就会建立更大的数学模式，而用这种更大的模式做一天或一周预报所需要花的时间却并未增多。但是，预报模式的扩展通常要求扩大水平和垂直分辨率，此外，还要涉及到对某些物理过程的更逼真的数学表述，如大气的吸收和放射辐射、山区上空空气的流动等等。60年代的一个具体的模式扩展是从过滤模式变为原始方程模式。利用新的模式可以作新的可预报性试验。到1970年，典型的加倍增长时

间看起来比较接近于3天而不是5天。到80年代初期,欧洲中心的模式和其它模式已经把加倍增长时间减少到大约只有2天,这个估计一直到1990年仍未变。因此,尽管大家已经确认2周预报比纯粹猜测略好一些,根据这种预报对移动性风暴的位置和强度所作的2周预测却越来越不符合实际。

进一步改进天气预报的某些希望来自以下事实,即:利用欧洲中心的模式从不同初始状态出发所做的2个预报之间的差别通常要比任一个预报与实际天气之间的差别增长得慢。如果模式能完全代表物理规律,那么增长率应该是一样的。因此,一定还有可能再作改进。计算指出:如果现有的模式能够准确地估计大气的加倍增长时间,那么一个较好的模式应该能做3天的预报,而且效果与现在1天的预报一样好,而做一星期的预报也应与现在3天的预报相当,有时较好。做两星期的预报也可以与现在一星期的预报相比较,虽然效果不算好,但可以包含一些有用的信息。这是最乐观的看法,还可以有别的看法,就是因为现在的模式还不完善,合适的加倍增长时间可能甚至比现在估计的2天还要短。

让我们换一个角度来论述计算出的加倍增长时间。首先,加倍增长时间是模式的属性。作为一个实际的大气系统的特性,2天的加倍增长时间至多不过是由模式所能分辨得出的特征结构(诸如急流、温带涡旋或许还有热带风暴等)的加倍增长时间。那些通常既不是由全球观测网,也不是由全球模式的计算格点所能分辨得出的小特征结构对于分辨出的大特征结构有着重要的影响;暴雨和阵雨通过热量和水分从低层向高层的输送能有效地改变全球的温度和湿度分布。在一个模式中如不包含这些效应,预报肯定较差。大尺度的流型往往能指示重要的较小尺度结构的存在与否,现在的标准的做法是在每一点上都去估计小尺度特征结构的最大可能的作用。这种方法现在叫做参数化,它一直是各次会议的主题。参数化仍然是大模式很少能真实表达的一个方面,不过,改进模式或寻找其它方案一直在不断地进行。

其次，如果模式一直能包括许多变量使得风暴和其它小尺度的特征结构能被适当地表征从而不再需要参数化的话，那么，预计这些特征结构细节上的误差增长1倍需要2天时间就完全不合理了。因为单个的典型风暴生命仅几个小时，这样当加倍增长时间假定为2天时，在这几个小时内误差的增长就几乎是看不出来了。而事实上，一个风暴可以在不到1小时的时间内使用其强度增加1倍，因此，可以预计两个比较相似的风暴之间的差别将飞速地加倍增大。

如果情况是这样的话，那么对几个小时后小尺度特征结构细节的预报将不会比猜测的结果好多少，从而它们对大尺度运动的影响的模式表达也不比参数化的好。换句话说，为了改进预报，我们可以在预报报开始的头半天应用一个具有难以置信的极高分辨率的模式，剩余的时间再回到目前使用中的模式去做预报。问题是：引入这样一个不可能达到的高分辨率只能把实际的可预报性增加几个小时，所以，看来未来的预报改进或者应是对据认为已分辨出的特征结构给出较好的数值表示，或者是在模式中对某些物理过程给以适当的考虑。由于分辨率的不断增加反过来造成预报能力的明显下降使得一些预报员提出：在90年代中期预期增加的计算能力可能更有利于用来实现某些Monte Carlo方法。

由于有这样一些障碍，当我们得知以下情况时可能会感到吃惊，即：在我们的混沌大气中，在有些地区某些天气要素能够比较准确地预报，不仅预报到2个星期，而是预报到2个月甚至2年。在这些要素中能预报得最出色的是赤道地区高层的风，它通常受到所谓的准2年振荡控制，这是首先由华盛顿大学的R. Reed（里德）所发现的。自从1883年印尼爪哇岛西部喀拉喀托的火山爆发事件之后，人们有了共识，认为在赤道上空20公里或25公里处吹的是东风；观测到的火山云甚至已围绕地球转了4次。

在50年代，当零星的赤道探测气球首先到达足够高的高度时，少数气象学家注意到，标准的所谓喀拉喀托东风有时并不存

在。我十分幸运地出席了 1960 年的会议，当 Reed 宣布他的发现时，我看到一些听众摇头，按照 Reed 所坚持的看法：在这些高度上的赤道风应连续地吹东风大约 1 年，然后吹西风大约 1 年，再后再吹东风 1 年，如果喀拉喀托东风提早或推后吹 1 年的话，那么按气象学的语言，应该称为喀拉喀托西风了。

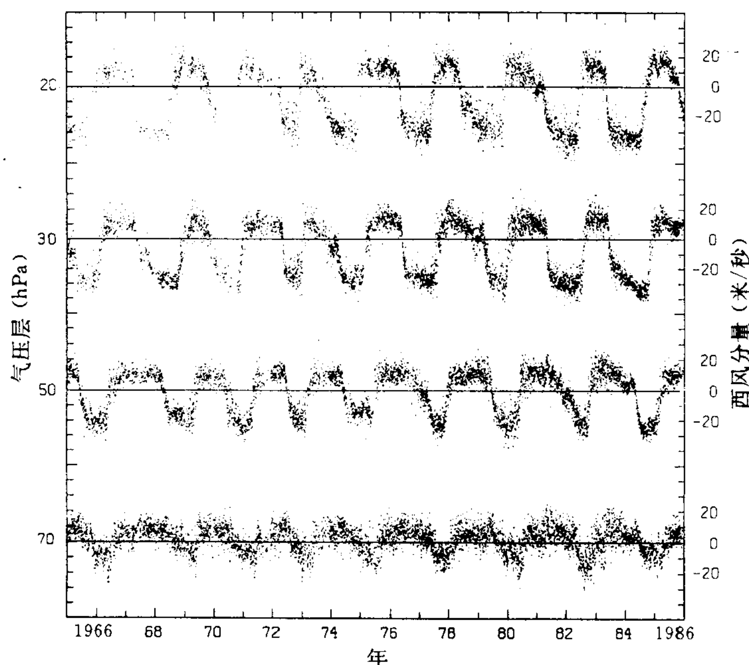


图 34 图中的密集点(有些已过密而不能彼此分辨)表示在 1965 年到 1985 年的新加坡上空 70 百帕，50 百帕，30 百帕和 20 百帕等压面上逐日的西风分量。实线为西风零值线，实线上方表西风的值，下方表东风的值，近似的 2 年周期是明显的

接下来的一些年份完全证实了 Reed 的看法。图 34 中所描绘出的点详细表明了位于赤道以北 1 度的新加坡上空在 70 百帕、50 百帕、30 百帕和 20 百帕的几个标准等压面上西风分量的观测值，

当时的海平面气压大约是1000百帕。在新加坡上空的这些气压所达到的高度范围变化为数百米，平均高度大约分别是18.6公里、20.6公里、23.8公里和26.3公里。20百帕的平均高度26.3公里大约是商用喷气式飞机飞行高度的2倍，图34中的序列从1965年初(当时在新加坡释放的探空气球首先正常地到达高层)一直延伸到1985年末，这段时间共有9个完整的循环。因为没有做任何平滑或平均，所以，标出的点可以视为做特定时刻预报时的预报值。尽管逐日的的起伏一直是存在的，但在高空3层中信号最强的部分是由振荡自身构成的，对大多数的天来说，可以通过位相的主观外推并预报该位相时段中的平均状态提前一或2个循环作出较准确的风的预测。与其它预测一样，这些预测有时会完全失败，特别是在东西风带之间激烈转换的时期。注意位相是从高层向低层传播的，从20百帕传到70百帕大约要1年的时间。

振荡的周期并不是像观测到的循环还很少时所推测的那样正好是2年，而且各个循环并没有相同的周期，所以，振荡估计也可能是混沌的，因此它的位相不能提前几十年来预测。此外，这种混沌与大陆风暴具有完全不同的时间尺度，这正如大陆风暴与雷暴有不同的时间尺度一样。或许主要的问题还在于我们需要了解在由许多相互联系的部分所组成的混沌动力系统中会发生什么情况？

有关在大气中混沌影响的其它结论则更具推测性，这些结论是将现实世界与假设天气不是混沌的情况下将会如何的推测的世界进行比较后得出的。在转盘中，我们已经看到了对称流型、定常传播波、摆动和混沌之间的转换，但是，我知道在转盘中绝没有这样的事发生，即在流型有规律地重复前的一个较长时段内流型会发生非常广泛的变化。这一点强烈地表明(虽然不算证明)：如果大气不是处于混沌状态，那么它将经历比较简单的周期振荡，这种周期振荡不会比或许周期为几个星期的摆动更复杂，尽管准2年振动(如果它在非混沌状态下仍能存在的话)可能会不符合这个结

论。这时任何简单的大气行为都要随季节的推移作调整，因而，真正的重复只能在1年以后发生，但每1年可能是所有以前各年的重复。

作为转盘和实际大气的共同特征的移动性的大风暴，无疑也会出现于我们所假想的周期性大气中，并且由于它们随季节的推移而进行调整，因此所有前后2次风暴的路径都会稍有不同。因此，对于这种假想的周期性大气，在1年之中，在地球上的很大一部分地区都能接受到丰富的雨水以满足农业的需要，每个地点有自己的具体降雨期。这时如果没有季节，则降雨可能只限于某些狭窄的地带内。

在尺度的另一头，在假想的周期性大气中，1年内，大量出现的雷暴和阵雨足以冲击地球的许多地区。飓风也与实际大气中的情况完全不同，如果其发生频率仍然与在实际大气中出现频率一样的话。由于飓风的形成和维持强烈地受海温的影响，因此，如果海表温度与实际海洋的温度不相上下的话，飓风就能够经常地发生。在世界范围内，每1年都可能有几十个飓风，每一个飓风都要有一个名字，而且在1年以后出现的同样的飓风可以起同样的名字，这是因为风暴被视为一个以年为周期的事件，就像厄尔尼诺(南美海岸附近不定时出现的暖流)不管何时重复出现都称为厄尔尼诺事件一样。因而可能会有1964年的Amy飓风或1977年的Ben飓风这类名称。

因为每个被命名的飓风都按照曾经被飓风重复过无数次的路经移动，所以我们没有理由预计它会造成很大损害。建筑者可以避开较强飓风的路径，这些强飓风路径加在一起也不会占有多大的地盘，但是如果在建设时能够事先考虑已知的最大风速和泛滥洪水的深度的话，即使在飓风路径上建筑也是不要紧的。在许多方面如果没有大气混沌行为的变化，事先制定计划就会简单得多了。因此，在现实世界中，制定计划所遇到的困难以及飓风和其它风暴所造成的巨大损失都应该归因于混沌。

对于假想的周期性大气，已不再需要预报员应用 20 世纪的方法去做天气预报，因为今年的天气或许就是去年的天气。不过，这时气象学家仍然很活跃，就如同实际世界中潮汐理论家们很活跃一样。他们要对按照单调规律出现的现象寻求解释。对于这种假想的周期性大气，人们可以成功地利用全球环流模式（它可能是全球大气研究计划的成果）去模拟重要的天气特征结构，只不过这样的计划究竟会不会实施，是应该怀疑的；既然对于假想的周期性大气已无需改进天气预报的过程，这时，谁还会提供经费呢？

第四章　迎战混沌

序　　言

19 世纪计算数学最值得骄傲的一件事是海王星的发现。如果你喜欢在入夜时分各行星逐个登场之时去观测天空的话，那么你一定知道，海王星从不露面的。它是太微弱了，毫不奇怪它是首先用望远镜被寻找到的。但是，你可能会问，用纸笔进行计算又与发现行星有什么关系呢?很难说清这个故事是如何开始的，因为每一

件事情看来总有它的来龙去脉，其中一件很重要的事是牛顿的著作《自然哲学的数学原理》在1686年的出版。在牛顿著名的发现，包括牛顿运动定律和著名的万有引力定律被普遍认识和接受以后，天文学家发现很容易写出描述行星在其轨道上运动解的方程组。这些方程组是数学家们所研究多体问题的一些特例。在多体问题中每个物体都要受到其它物体的万有引力作用。但是，解多体问题的方程组会遇到另外的困难。

数学家通常感到他们并不完全能够解一个微分方程组直到写出方程组的通解。通解是一组公式，这组公式用每个变量在某个初始时刻的已知值，可以给出该变数在任何时刻的值。例如，一个棒球手打棒球，控制棒球运动的方程的解是容易找到的。这个解式中有一个符号例如 t 代表时间，只要代入适合的 t 值到这个公式中去就可以找到棒球的任何瞬时位置和速度。当棒球在空气中运动的时期内，棒球位置的集合形成了一个抛物线。

更一般的通解要考虑到任何棒球手所打的棒球，要考虑到这个棒球手的水平高低，是在家中打的还是在野外打的。此时解的表达公式中还将增加一些符号，以表示棒球刚刚离开球棒时的位置和速度。

当然，上述事情发生在空气没有阻力的情况下。任何一个打木制高尔夫球的球手都知道，高尔夫球决不按抛物线运行，棒球在一定程度上也是如此。实际上，地球的曲率和自转都会阻止棒球的运动轨道是一严格的抛物线。方程组仅仅是模式，只有在模式中棒球和高尔夫球才会呈抛物线运动。

当我们没有运气找到某些系统的通解时，我们就求助于数值方法。例如，我们可以从变量的初值开始，因为实际上微分方程是一个公式，它可以由所有变量的现在值告诉我们这些变量的变化速度如何，所以我们可以向前一个一个小的时间步长去求解，一直到我们所期望的时间为止。这个方法有很大的优点，即当其它方法不能用时，它可以得到很好的近似解。但是数值方法也有缺点，即

当我们希望用新的初始值或新的常数去求解时，我们仍要重新开始计算。纯数学家历来瞧不起数值方法，这种态度一直延续到计算机作为较新设备并被普遍使用的时候。

18 世纪的天文学家寻找两体问题的通解时已经没有什么困难了。这两个物体以椭圆轨道运动，并且轨道以两体组合的质量中心为其焦点。当两个物体一个是太阳，一个是行星时，由于太阳的质量是如此之大，以致焦点就在太阳表面的底下，而且行星就围绕太阳作椭圆运动。

当理论解与观测相比较时，例如就木星来说，是很一致的，但还是有偏差，尽管偏差很小，也仍然无法用观测误差来解释。一个明显的假设是这种偏差产生于其它行星的万有引力的影响。在木星情况下，这种影响显然就是土星。因此三体问题就参与进来。早先试图找三体问题的通解都失败了。当时天文学家研究了一种摄动法，该法将太阳和一个行星的两体问题的解作为一级近似，然后将第二个行星的摄动影响引入作为一级近似的修正。几个行星的摄动也能够以同样方法处理。

对于许多行星而言，摄动法确实去除了观测和理论上的差别。但是，对于天王星而言，这个偏差仍然超过了所预期的观测误差，因为在 19 世纪，观测误差已经变得相当小了。于是天文学家们逐渐倾向于认为这个偏差可能是由于受到还没有发现的行星的万有引力所致。

英国的 J. C. Adams（亚当斯）和法国的 J. J. Leverrier（莱弗里耶）同时且各自独立地转向于从事摄动法的困难任务。他们不是研究一个已知行星在已知轨道上运动所产生的摄动，而是要研究多大的行星在什么样的轨道上能产生上述摄动。经过数月的研究，终于在 1846 年，两人先后仅相差几天分别计算出了海王星的位置，两者仅几度之差。在 Leverrier 的鼓动下，柏林天文台找到了海王星，偏离他所计算预测的位置仅仅大约一度。

这种计算的成功并没有阻止数学家和天文学家去继续寻找三

体问题的通解。和两体问题类似，似乎可以合理地认为这个解是存在的，只是有待于去发现罢了。而混沌行为通常不能用时间值代入公式来进行描述，并不属于数学家们已经熟悉或在某些情况下已经建立的那种数学问题。

本章中我要提出一连串的历史事件，叙述我们日益增长的对混沌认识的过程，从海王星发现时对混沌的毫无认识，直到一个半世纪以后人们已逐渐认识到混沌几乎无处不在。当然，我并不认为以下这种想法是新思潮，即：小的事情能够导致每天的生活或世界事务的重要结果。熟知的一首诗是这样开始的"没有钉子，就没有鞋子"，接着诗又从鞋子写到马，写到骑士，写到战役，一直写到王国，这种写法并不是 20 世纪的创造。看来，在 19 世纪中叶人们恐怕连猜也未曾猜到，由一些不太复杂的定律所支配并常能用决定论的数学方程描写的现象竟然可以不必按照定律和方程所预测的方式变化。

我不想谈一个完整的或不间断的故事——书的篇幅和我对重要事情所了解的程度也不允许我这样做——也不想说明所有事情的重要贡献或它们的特有的贡献。相反，我将以个人或自传的方法，提出我对某些早些时候的研究所作的分析，以及通过我最初如何了解这些事情和它们对我的影响来讨论最近一些事情。我将用较多的篇幅——多于概述——来谈谈导致我的发现的一些细节。尽管如此，我只是希望读者能够从总体上较好地认识到，把混沌从一个难以识别的现象变成确实无所不在的现象的过程中到底发生了什么。

识　别

大约在海王星发现以后 30 年，当时三体问题仍然没有解决。美国天文学家和数学家 G. W. Hill（希尔）考虑到一种非常特殊的情况。Hill 已经构造了一种新的方法去确定行星的轨道，他在该

方法中作了大量的计算，直到小数点后第15位。当时，对三体问题作了三个简化。首先三个天体中质量较小的一个可以忽略，因此较大的两个天体不受它的影响。其次，较大的两个天体围绕它们共同的质量中心作圆周运动，而不是作一般的椭圆轨道运动。第三个简化，也是最重要的一个简化就是三个天体在一个平面上运动。这样，他把问题简化成为由4个方程所组成的方程组，四个变量代表平面上两个小天体的位置和速度。这个方程组看上去是相当简单的，但是仍然不能找出它们的通解。

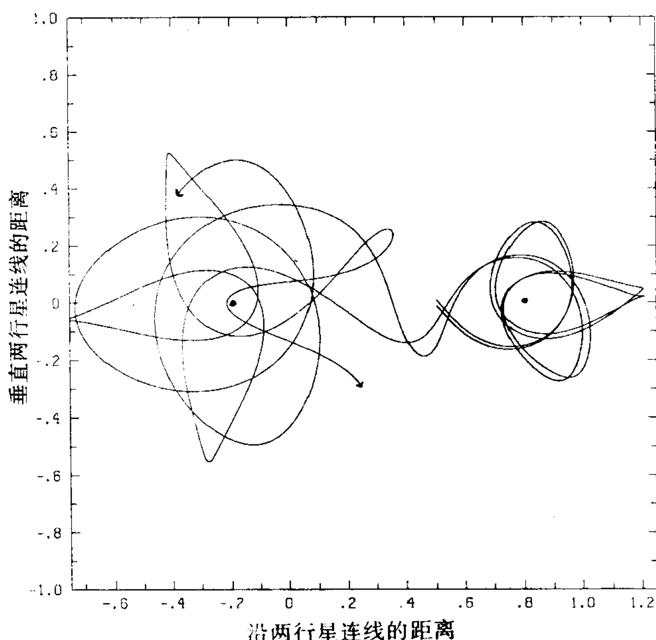


图 35 在几乎相同的条件下开始运动的一颗卫星的两条可能轨道，由 Hill 的简化方程组的数值解积分两年时求得。观测卫星的坐标系可以旋转，使得用黑点表示的两个行星分别位于距坐标原点的左边0.2单位和右边0.8单位

用现代的计算机就很容易确定它们的特解。图 35 说明从非常相近的位置点而以相同速度开始运行的小天体(我们称它为卫星)可能具有的一对轨道。这个显示卫星轨道的坐标系跟着较大的天体(我们称它为行星)作旋转运动。也就是说,一个坐标轴(例如 x 轴)始终平行于两个行星的连线,而另一个坐标轴则始终垂直于连线,所以在图上行星总是占据 x 轴上的固定位置。

在这个例子中,左边行星是右边行星质量的 4 倍。卫星轨道首先绕小行星数圈,两种轨道保持相近。然后就绕大行星旋转,但是两种轨道分开了。两年后,当它们到达图中箭头所示的点时,它们被大大地分开了。这里的一"年"指行星围绕着它们的质量中心旋转一次所需要的时间,质量中心位于从大行星到小行星路上的1/5位置。继续计算表明两种卫星轨道在两个行星之间来回穿梭,在较长时间以后,它们会像围绕同一行星旋转一样围绕不同行星旋转。显然,这种状态是混沌的。但是,在其它的许多 Hamilton 系统中,选择其它的初始条件将导致规则的状态,轨道周期地围绕一个行星或另一个行星。图 36 是一个 x 随时间 t 的变化图,x 表示卫星离质量中心左边或右边的距离。该图显示出卫星运行 20 年的一种混沌轨道,它表现出不规则地穿梭在两行星之间。

很难想象 Hill 完成了许多轨道的计算却不能在几个月或更少的时间内(如果他是想做的话)产生像图 35 那样的曲线。当时他对这些方程已足够了解,因此,在他第一次尝试中就选择了这样一种初始状态,使得卫星在两个行星之间穿梭,而不致逃逸到无穷远。但他却未必知道,在一条单一的轨道上,卫星围绕不同行星的连续旋转会不规则地改变它们的形状。总之,他当时对实际的情况更感兴趣,当三个天体是太阳、地球和月亮时,或是土星、土卫六和土卫七时,Hill 知道月亮是不能在地球和太阳之间穿梭的。

现在已经用数值方法对 Hill 方程组求解了好多次。显然,产生了像图 35 那样典型的曲线。在《上帝掷骰子吗?》一书中,I. Stewart(斯图尔特)对两个质量相同的行星给出了和图 35 类似

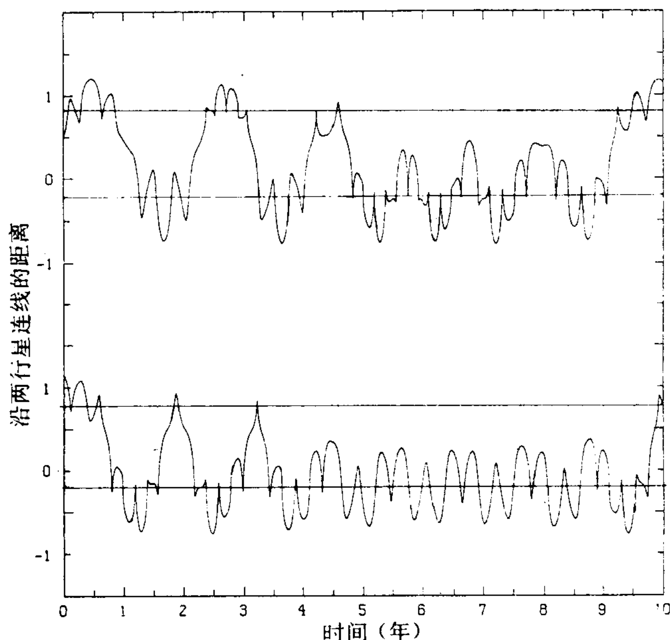


图 36 把图 35 延伸至 20 年时的一条卫星轨道。这里垂直坐标是图 35 的水平坐标。上部曲线表示前 10 年(参看横坐标),下部曲线表示后 10 年。图中两条水平直线代表两个行星的位置

的曲线。

三体问题,特别是 Hill 的简化问题立刻激发出法国大数学家 H. Poincaré(庞加莱)的丰富的创造力,他是在海王星发现几年后出生的。和他以前的科学家一样,他解方程组失败了。但是他又和其他科学家不同,他很实际地解决了该问题。他证明 Hill 的简化方程是无法求解的。当然,这个方程组确实具有通解,但是我们不能找到它。

一夜功夫 Poincaré 决不能取得惊人的结果,事实上他对这个任务致力了许多年。在找不到定量解后,他偏离了前人的研究道路

而转向定性的方法。他考虑比简化的三体问题更为一般的方程组，并且致力于研究方程组的性质，从而开创了动力系统理论的先河。

为了处理 n 个方程的系统——在 Hill 的简化问题中，n 为 4——他开始引进相空间。这是一个假想的 n 维空间，在这个空间中系统的每个状态用相空间的一个点表示，而且特解在相空间中显示为一特殊曲线——解曲线，今天我们一般称之为轨道。然后他引入一个"截面"概念，今天我们称为 Poincaré 截面，它是嵌入在相空间中的 $(n-1)$ 维流形并且与解曲线相交。Poincaré 截面的一个简单例子是一个点集，每个点的 n 个变量中的一个变量（例如第一个变量）假设为特殊固定值（例如设为零）。

正如我们在第二章中指出的，解曲线与截面相交的一个点就完全决定了解曲线的其它部分，包括解曲线下一次和截面相交的点。因此，我们可以集中研究截面上交点的序列来代替研究整个解曲线的性质。一个截面有两边，可以想像一边是红色，另一边是蓝色。通常我们只考虑解曲线单向穿过截面所产生的交点，比如说从截面红侧到蓝侧，而忽略从截面蓝侧到红侧穿过时的情况。一个简单的周期轨道，像圆轨道或椭圆轨道，穿过截面正好是一个点即不动点——而比较复杂的周期轨道在回到第一个交点之前可以穿过截面有好几个点，并且重复这种循环。

然后 Poincaré 指出了渐近解的可能性。一个渐近解曲线是当时间增加时愈来愈接近于某个周期解曲线的解，所以渐近解与截面相交的交点序列收敛到一个不动点。另一种解也是渐近的，即如果时间的方向颠倒，截面交点的序列看起来是从不动点出发的。最后还有双渐近解，它是在时间的两个方向上都渐近它。一个从不动点出发，然后收敛到同样不动点的序列叫同宿的，即同宿到原来的不动点。Poincaré 说明，同宿点的存在就意味着存在无数的有不同周期的序列，也存在无数的非周期序列。Poincaré 通过定性的数学推理所发现的就是混沌，至少是有限混沌。

Poincaré 是否根据许多解——不仅是个别解——对初始条件

的敏感依赖性和非周期性来识别完全的混沌现象呢？他当时似乎没有把非周期解认为具有敏感的依赖性，但是他已经相当完全地认识到一般的敏感依赖性现象。他最常引用的一个句子开始就是“预测是不可能的……”。

这里的引证取自他的许多自然哲学著作中的一篇——有关随机性的论文。任何读过这篇论文但并不了解 Poincaré 工作的人立刻就会认识到他是一个深刻的思想家和一个天才的作家，但是可能没有意识到他是一个数学家，更不用说他可能已是当时最伟大的数学家了。在这篇论文中，他认为我们通常所说的机会或随机性在许多情况下可能就是先前某种情况的必然延续，尽管我们可能对此并不了解。他注意到在某些情况下我们可能完全不能觉察出有关的前因条件，而在另一些情况下我们可能相当准确地但并不完全地观察到前因条件。后一种情况下的不确定性可以放大并且最终成为主导。难道说他没有描绘出混沌的行为吗？

无法立即得到清楚的答案。在一些引导性的讨论以后，他分析了四个例子。第一个例子是一般的不稳定平衡现象，他用一个以顶点站立的圆锥来说明。理论上应该有一个位置使圆锥保持站立。但是，当用站立的铅笔时，或圆锥旋转太慢时，最小的扰动就能引起它倒下。如果扰动小得无法观察，我们就不能事先说明圆锥在哪个方向倒下，这样他声称预测是不可能的。

显然，在这个问题上他没有描述完全混沌。在圆锥倒下时，它处在一个瞬间的过渡状态。在瞬间的影响停止以后，圆锥将横躺着静止不动，处在一个稳定的平衡状态，并且将不再显示出似乎是随机的行为。可以合乎逻辑地预测圆锥将保持在那个平衡位置，而且任何新的小扰动都不会严重地破坏这种预测。

他的第二个例子就是天气，在书中写道：“我们知道大的扰动一般总产生在大气不稳定平衡的区域内。气象学家非常清楚地知道，平衡不稳定了，气旋就将在某处形成，但是无法说它究竟在哪里”。看来他研究气象学的理论不够深入，尚不足以建立他的这个

理论，也许他是在归纳当时主要气象学家的思想。今天，我们的想法稍稍有些不同——我们认识到了现实中的许多不稳定性，但是除了在模式中的以外，我们几乎没有发现实际的平衡态——但是，无论他的假设在气象学意义上正确与否，并不影响他所发现的现象是否构成混沌，而是影响到我们如何能判断他是否发现了混沌。假若他假设的大气不同于实际大气的话，甚至我们还不能说大气是混沌的。

他是认为在气旋突然发生时所造成的不确定性在气旋消失之后仍然持续存在，以致在气旋发生前对发生后任何时刻的天气所作的预报往往会失败呢？抑或是认为当晴好天气回复时这种不确定性会随着风暴一起消失，以致预报仅对风暴发生期间的天气报不准呢？他没有作出说明。他的另外两个例子（小行星沿黄道带的分布和一般旋轮线的变化）也没有能揭示出答案。

然而，他仍然是慎重的。在文章的后面几节中他描述了第二个现象。这个现象相当于不确定性的维持，他是用气体中的个别分子碰撞其它分子的运动来说明这个现象的。他写道："我们刚刚看到，只要在碰撞前使分子偏离一个无穷小的量，就足以使其在碰撞后偏离一个有限的量。然后，如果分子经历两次连续的碰撞，那么只要在第一次碰撞前使分子偏离一个二阶无穷小量，就足以使其在第一次碰撞后偏离一阶无穷小量，在第二次碰撞后偏离一个有限的量。"

这个过程使我们想起弹球机，所不同的是每个分子碰撞的是另一个移动的分子，而不是一个固定的弹球。Poincaré 深深地认识到，在碰撞事件产生以后，不确定性仍然保持。因此，合理的结论是，他考虑的风暴后的平静，正像风暴一样，都是不可预测的。

在论文中他未提到三体问题，也没有提到处理三体问题的新方法。但是，留给我们的感觉是他必定识别了混沌，混沌是他认真研究的方程所固有的。

被遗忘的角落

1975 年 Li(李)和 Yorke(约克)发表了常常被引用的一篇文章“周期 3 意味着混沌”。不管他们原先的打算如何,他们毕竟是建立了一个新的科学术语,尽管我们可能和他们在想法上意义有所不同。

而就在这一年,更确切地说是对混沌兴趣发生“爆炸”的一年,这种巧合或许是偶然的。对于许多专家来说,像 Juliet 的玫瑰一样,混沌比起任何其它的名字散发出更为芬芳的香味,其中一些专家甚至找不到合适的名称。在我自己的研究工作中我避免用混沌这个词,直到最近的 1983 年我一直赞成用“不规则性”这个词。混沌在科学上引起了一阵兴趣以后不久又引起了一阵社会公众的兴趣,看来很大可能是由这个吸引人的名字所决定的。

早在 19 世纪,Poincaré 就已建立了动力系统的理论基础,并且至少在有限混沌的意义上说明了某些系统的混沌行为,而令人费解的是为什么直到 Poincaré1912 年去世之后约 60 年时,才出现了混沌热潮。任何解释只能是推测性的,但是我相信涉及如下两个因素。

因素之一是人们一般都倾向于不规则性。Poincaré 没有寻找混沌。他试图了解天体轨道时发现了混沌。对他来说,正是这种混沌现象使得三体问题太复杂以致不可能求解,而并没有把它看作将来研究领域的重要课题。

Poincaré 的继承人无疑是 G. D. Birkhoff(伯克霍夫),在 Poincaré 去世大约 15 年后,他写了一本权威性的专著《动力系统》。Birkhoff 被誉为在美国受到全面正式教育的第一个杰出的美国数学家,他用实例来证明他研究的工作。他的工作给美国数学以巨大的促进。即使如此,他的一些同事也常常说他的真正的老师是 Poincaré。

Birkhoff 处理的是非常普通的方程组。他严格证明了 Poincaré 的一些猜想。他详细讨论了一组中心解的概念，对于天体力学的 Hamilton 方程组来说，中心解就是所有解集，而对于许多熟悉的耗散系统来说，这就是吸引子。总之，他给与周期解以显著的重视。

可是，他并非不接受不规则性。像 Poincaré 一样，他把动力系统定义为由微分方程——流所控制的系统。但是，正像我们已经知道的，当相空间的全体用一个 Poincaré 截面来代替时，流就化成了映射。因此必然导致他研究映射。在随后的一篇文章中，他考察了一定类型的二维映射，其中的一个吸引子集合包含了一条封闭曲线——它是围绕着内部区域的一个环，并将内部区域和外部区域分开。他指出，有些映射连续有一些点在一个方向上围绕着环，而在相反方向上有另外一些点围绕着环。由此，他断定封闭曲线本身折回无穷多次。对于一些映射，封闭曲线是吸引子，而且是奇怪吸引子。或许它们不能叫做曲线，因为我们一般不能从这个曲线上一点沿着曲线运行有限距离到达曲线的另一点。

为了看到 Birkhoff 知道但从未见过的这种曲线，我们需要不远离滑雪斜坡来观看。雪橇连续向东南方向运动，然后又连续向西南方向运动，这就相当于吸引集的点围绕着环在相反方向运动。图 37 和 38 给出两个例子。图 37 的曲线是通过图 11 的连续画面逼近的，那里的雪丘高出洼地 1 米。从图上看，该图和图 12、图 13 中不同坐标系中的吸引子没有区别。图 38 的曲线是由图 18 的连续画面逼近的，其中雪丘高度是 1/2 米，这里吸引子仅由曲线上两个点构成，而且混沌是有限的。

Birkhoff 并没有为他的曲线写出具体的方程组。在他谢世后的第二年，即 1945 年，剑桥大学的 M. Catwright（卡特赖特）和 J. Littlewood（利特尔伍德）研究了一个周期强迫耗散系统，即所谓 van der Pof（范德波尔）振子的理论状态，并在文章标题中直接给出了系统方程组，文章题目为“论二阶非线性微分方程，第一部分

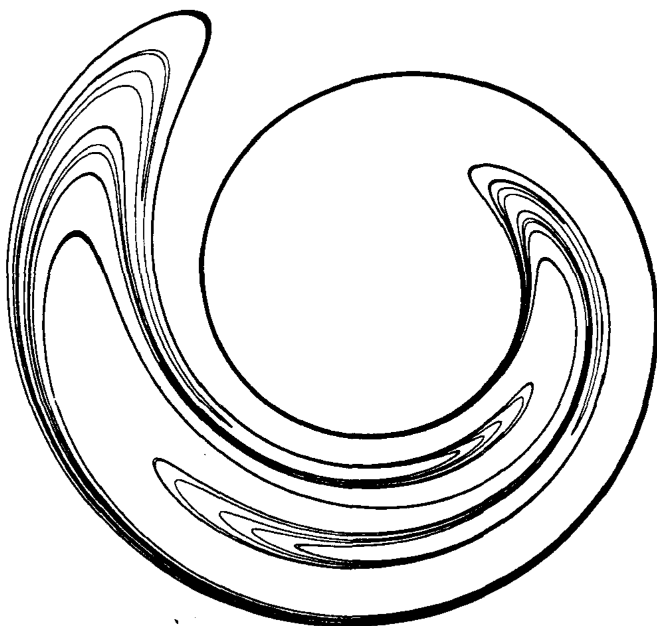


图 37 在斜坡上滑行的雪橇的 Poincaré 映射的吸引集,雪丘在洼地上方 1 米。这个集合也是吸引子,坐标系是图 13 所用的坐标系

方程 $\ddot{y}-k(1-y^2)\dot{y}+y=b\lambda\cos(\lambda t+\alpha)$,$k$ 足够大”。他们发现,在某些条件下,该系统具有两个带有不同周期的稳定周期解,由此他们说明,他们的不变曲线中的一条很像 Birkhoff 的“坏曲线”。这曾经是对被 Birkhoff 所证实的曲线的流行的看法,尽管他本人称这些曲线为“不平常的”。

然而,他们两人并未停止对这些曲线的研究,并且成功地找到了第一个已知的可导致“坏”吸引集的微分方程。除了对于没有吸引集的某些 Hamilton 系统外,这是第一个产生出的至少是有限的混沌。系统的参数在文章的题目中给出,图 39 就是一个吸引子的 Poincaré 截面。因为很少有可能选到导致系统完全混沌的参数值,

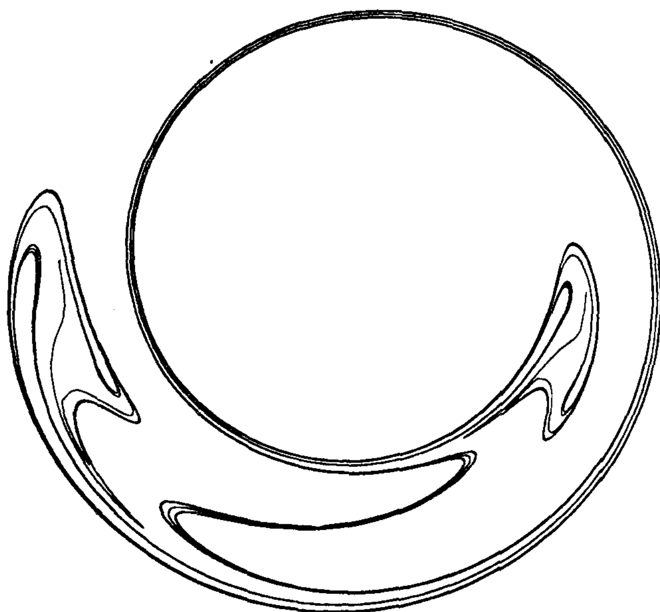


图 38 和图 37 相同，这里雪丘高出洼地仅 50 厘米，两个吸引子的每一个均由集合的单个点组成

所以该图给出了一个奇怪吸引子。由图可见，处处存在的平行线段如此紧密地挨在一起以致多倍放大也不能将它们分辨开来，这就不奇怪了。只是由于该吸引子存在着对初始条件的敏感依赖性才能说明这个吸引子必然是奇异的。

可以这么说，早期不能对混沌有所突破，并不是由于普遍地一直对它缺少关注，而是曾经缺少过关注。在某种程度上这是真的，而且也可能是由于该领域学术带头人的优先选择所引起的。因为前一辈带头的科学家已经着手研究过，并且已经失败过，所以年青科学家能得到赏识和奖励的最快的一个方法是去解决一个已知的问题。寻找这种赏识的人很少能有从事研究全新问题的激情。历史告诉我们，甚至围绕着新问题的大量未被开发的领域，有时候正

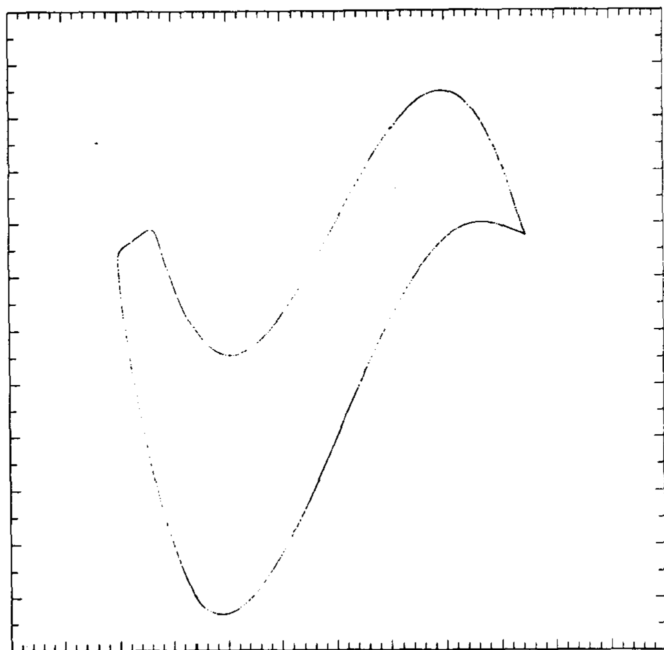


图 39 Cartwright-Littewood 吸引子的 Poincaré 截面

藏有解决老问题的钥匙。实际上,Poincaré 和 Birkhoff 以及许多其他带头科学家并未指出未来的问题属于混沌理论。

当然,混沌不能永远留在被遗弃的角落,在五十、六十年代之交开始出现了对混沌持决定性的更为肯定的态度。一个明显的实例是美国数学家 S. Smale(斯梅尔)的研究,他创立了著名的"马蹄"问题。

马蹄是一个二维映射。为了表述它,我们在相空间中取一个方形,垂直压缩它并水平伸展它,然后把它弯成一个马蹄形状,最后把它嵌入到原来的方形中。可以有许多方法去做马蹄,但是马蹄的末端应该从被压缩的方形边投影,而不是从伸长的方形边投影。因此原来方形中的每一点被移动到马蹄中的每一点,而不必要移动到方形本身中的每一点。当这个过程向前或向后重复时,这些点将

永远保持在方形中而形成一个不变集。Smale 说明，不管马蹄的形状是什么，都存在混沌，大多数的迭代序列是非周期的。因此，在整个系统中间至少存在有限混沌。这个不变集是否是一个吸引子，从而是否是一个完全混沌则取决于这些点集离开方形后发生了什么，特别取决于进一步迭代后这些点是否再进入方形。

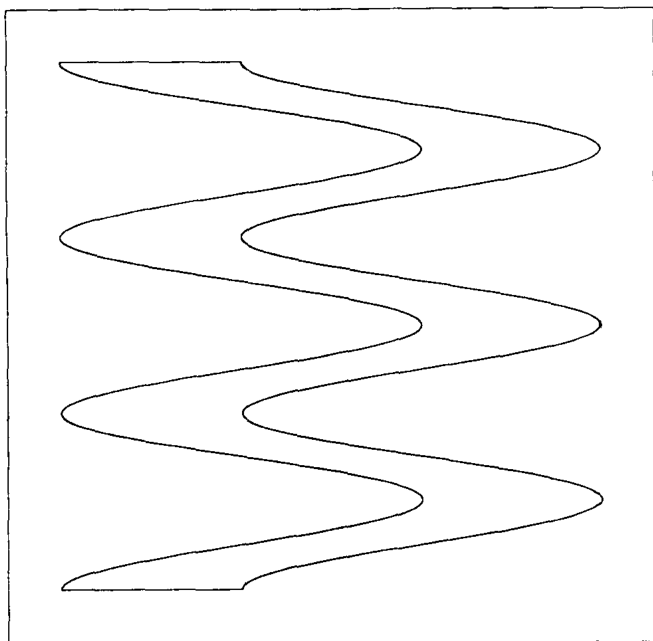


图 40 一个方形和由特殊映射而形成的区域，这个映射将图 41 内部的小方形装入与小方形相交的马蹄形区域

有时一个马蹄能够在总体上并不是马蹄的映射中产生。图 40 就说明这种情况。图中的映射是这样产生的：选取一方形，将其逆时针旋转 90°，在垂直方向压缩一些，且在水平方向挤压它，使它嵌入到一个扭曲的区域内。这个映射将图 41 中的内部小方形装入与小方形相交的马蹄形区域。

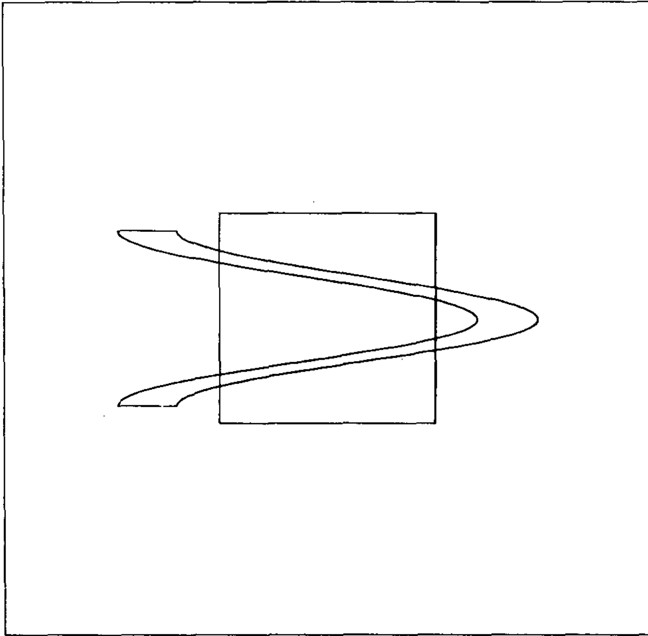


图 41　一个马蹄映射，见图 40

不管混沌的性质如何，Smale 对“坏”的曲线和“好”的曲线同样有兴趣。更一般地，他显露出对系统至少有某些不规则解的可能性有兴趣，而常常并不关心系统的通解是否不规则。对一个数学家来说，有限混沌和完全混沌一样引人入胜。有限混沌同样能导致特殊形状的图（见图 38），即使它们可能不是吸引子。而且对一个特殊的系统，当对完全混沌存在的证明变得难以捉摸时，有限混沌的存在却常常可以确立。此外有些人对现实的系统有兴趣，此时在有限混沌和完全混沌之间有巨大的差别，因为有限混沌不能观测到。如果心脏跳动中的潜在混沌只是有限的，我们就不必为心律不齐而担心。如果全球天气系统仅仅具有有限混沌，那么天气就如同它根本不存在混沌一样是可以预测的。

几年以后 Smale 写出一篇叫“微分动力系统”的文章，该文被

举世公认为是 Birkhoff 论文的继续。他直接偏离传统方法而用差分方程——映射——来定义动力系统,并且他注意到随之而来的较大简化。在该文中他讨论了马蹄,并且指出了一个现在我们所熟识的常常被叫做螺线管映射的三维映射。不管由马蹄产生的奇异集是否是吸引子的一部分,螺线管映射确实具有一个奇怪吸引子。它像一个绕在管内的无穷长的线圈,而横截面却不像我们迄今所看到的任何东西。没有两个点是相连的,虽然在图 42 中的样子看起来一些点是相连的,这是因为点与点之间比打印点的直径还要靠近。

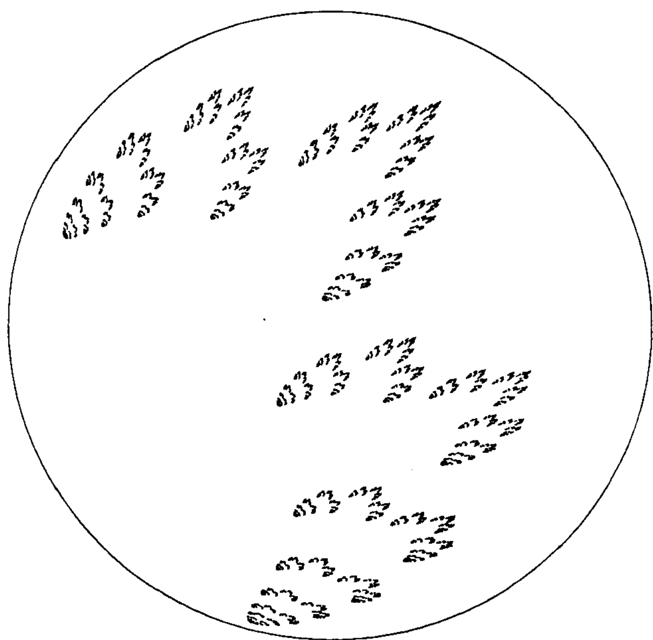


图 42 三维螺线管映射的吸引子的一个横截面,吸引子是包含在管的圆形横截面中

不管早期人们对于不规则性的态度可能有什么影响,对混沌

兴趣“爆发”的时间产生影响较大的因素肯定是计算机的出现。在前计算机时代像 Birkhoff 这样科学家的工作以及计算机时代的 Smale 的工作都清楚地说明,虽然混沌的某些方面的理论用笔和纸就能充分研究,但是要说明特殊方程系统的混沌解以及构造与解相伴的奇怪吸引子则要求比较多的计算。让我引用我自己的工作作为说明。

我所遇到的第一个由数学上产生的混沌是由非常简化的全球天气系统模式得到的,这个模式包含的不是上千或几百万个变量,而仅仅是 12 个变量。解这样大小的方程组,用手去计算不是不可能的。18 世纪和 19 世纪的天文学家对行星轨道的计算正好说明了这一点。在建立了这个模式后,如果已经选择了最好用的参数值,并且放下所有其它专业性的活动,那么我可以在一个月或两个月的时间内亲自用手计算出可识别的非周期解,这个时间相当于以后将计算结果写成为了出版的论文所需的时间。缺少计算机的话,只不过是要做双倍的努力。问题是首先我不知道什么样的参数能导致混沌,也不知这样的值存在不存在,而且在找到某些可用的值之前,我要做许多次试验。在设立 12 个变量的模式之前,我已经用其它的方程组做了不成功的试验。如果没有计算机,那么仅仅计算所需要的时间就有可能是以年计而不是以月计,况且其它事情还要占据我许多时间,或许我都不能继续工作下去。即使我在第一次试验中就很侥幸,要想确定大量解的集合,并且从中产生出像本书第一章说明的那种集合,仍然是不可能的。我确信,其他任何人通过手算来寻找微分方程非周期解时也会遇到类似的障碍。

看来合理的结论是,只要计算机已经有了一段时间,那么它们对日益认识混沌的贡献将会大大超越它们在那些由个别科学家研究特殊问题而产生的迄今未解决的方程组中的应用。一旦足够数目的研究者将他们研究的解在公开的文献中发表,这样其他科学家就能识别以前所不能认识的一些共同的特征,那么他们对类似方程的研究也不再显得无用了。别人研究结果的刺激能导致对所

有类型方程进行新的研究。突然间，早期问题中所显示出的奇怪吸引子与许多其它的吸引子联系在一起了，它们经常是由与特定的物理问题无明显关系的方程式所产生的，并由于它们自身内在的合理性的证明而被人们所承认。

探　索

在这里我要相当详细地叙述导致我个人涉足混沌的情况。回忆起主要的事件是容易的，但我想把它们和混沌前前后后的一些进展联系起来，这就要涉及到一些猜想。我开始是在麻省理工学院气象系学习，以前习惯上称为波士顿技术学院，现在一般称为 M.I.T.。从 1948 年起我在 M.I.T. 做博士后工作，当时我的主要兴趣在全球和大陆尺度的大气结构动力学上。

作为一个学生，我已经知道动力学方程确定了在大气中所发生的事情。但是当我的想法愈来愈受到数值天气预报的影响的时候，我明显感到这些方程并不能阻止任何实际的或非实际的大气状态只是解的一个初始状态。我感到，方程组中的各种解必须收敛到一个特殊的状态集合——实际中的状态集合。我甚至为了找到这一解集的表达式而做了一些不成功的尝试，但最终还是放弃了。从今天的知识来看，我是在寻找吸引子而且确实相信了它的存在，但是错误地认为它能够用少数公式来描述。

打开这种局面是在 1955 年，M. Thomas（托马斯）为了在康涅狄格州的哈特福德的旅行保险公司建立并领导一个新的天气研究中心而辞去了教师职务。当时他已经负责了一个统计天气预报计划，在早期的计算机时代，该领域得到了相当数目的经费。

从哲学上讲，统计预报比动力学预报更具有天气学特征，因为统计预报是基于对过去所发生的事情的观测，而不是物理原理。它与动力学预报的相似之处在于它使用具体地点的天气要素值，而不是使用可识别的天气结构。已经受到广泛重视的统计预报的类

型是“线性”预报。例如纽约明天的温度被预测为常数 a 加上芝加哥今天温度的 b 倍，再加上圣路易斯昨天相对湿度的 c 倍，再加上其它类似的项。估计 a、b、c 等常数的最佳值的数学方法在很早前就已建立起来了。事实上，对于气象学家来说，使用任何有关大气的知识的唯一机会在于选择预报因子，即用常数值相乘的那些天气要素。建立一个公式所需的计算工作量随着预报因子数目的增加而迅速增加，因此，像数值天气预报一样，统计天气预报仅仅在计算机广泛应用之后才得以发展。这种方法被许多动力气象学家特别是那些赞成数值天气预报的人看作为呆板的方法，因为它并未对大气为什么有如此行为给出新的了解。

我被任命填补因 Thomas 辞职而空缺的位置，而且我也得到了他负责的科研项目。在第二年我检查了各种统计所推导出的公式，最后我确信，实际做的统计方法在数值意义上是重复天气预报员已经做了许多年的方法——天气结构的移动速度大约位于它以前的速度和它的正常的速度之间。这样做的一天预报图确实一般，但是，该方法在过去和现在对于局地天气情况的预报都是有帮助的。

不用说，许多致力于统计预报的人和我的看法不同。或许他们把我看成是从数值天气预报阵营中来的一个渗入者。他们中的一些人特别提到了著名数学家 N. Wiener（维纳）近期的一篇文章，该文似乎表明，线性统计方法能够完成其它方法做的事，当然也能够完成数值天气预报或天气学预报做的事。我认为这个结论是很难接受的，并且我自己确信，尽管其他人不信，Wiener 的说明确实是正确的，但是他没有用最容易理解的语言去写，从而被误解了。1956 年在威斯康星州的麦迪逊召开由许多统计预报界人士参加的会议上，我提出可以选择一个确实不是线性类型的方程组去检验这个假设。可以用计算机算出持续的数值解，然后将这个数值解看成是实际天气资料的一个集合，并用标准的方法去确定一组最佳的线性统计预报公式。想要这些公式确实能和其它的预报方法

竞争的话，它们就得准确地完成预报，因为我们只要使计算程序运行片刻就很容易准确地“预报”出这些“资料”。

我的第一个任务是要选择合适的方程组。我以一个专业气象学家和业余数学家的方式着手工作。虽然原则上各种各样的方程组均可以用，但是我希望选择类似于描述大气行为的那种方程组以期产生某些良好的效果。在进行了一些试验以后，我决定用一个大大简化的被滤波的数值天气预报方程形式，这种形式将一般用的有几千个变量的方程化减为仅仅少数几个变量。

一天，我们系的博士后科学家 R. White(怀特)(他后来成为美国天气局主任，以后还领导了取代天气局的机构)建议说，我的办公室里应该有一台小型计算机。你也许会纳闷，我为什么直到那时还没有用过计算机。要知道，我们回忆的是个人计算机在市场上出现前 20 多年的事。事实上，当时对于个人用的计算机是前所未闻的，而且我确实从来就没有这种想法。我们花费了几个月的时间研究各种各样的可供选择的型号，最后决定购置一台型号为 Royal-McBee LGP-30 的计算机，它大约有一个大桌子大小，还不断地发出噪声。它的内存是 4096 个 32 比特字符，其中大约 1/3 用于标准输入和输出程序。该机器计算一次乘法大约用 17 毫秒，打印一满行数字大约要用 10 秒。即使这样，当我们用优化的机器语言编程序时，它还是比台式计算器(当时袖珍计算器还未出现)快大约 1000 倍，这台机器对于解小型方程还是很理想的。

那时候计算机远没有普及，许多科学家，包括我自己在内，还不懂得写计算机程序，这是不足为怪的。我接下来用了几个月时间去熟悉计算机。然后又再回到简化气象方程组，我选择了带有 14 个变量的方程组。以后我又压缩掉一个变量，接着又压缩掉一个，将方程数目变成 13 个，以后又变为 12 个。

这个方程组包含了几个参数，它们表示驱动模式天气所需要的外热源的强度和分布。因此，如果一组参数产生出的解不适合了，我们就换另一组参数去试验。最早我试图产生“资料”，但结果

总是产生了“天气”,即逐渐稳定下来的一个定常状态,然而,它对我的目的来说毫无用处。在进行了许多次的试验以后,我最后发现了一个解,它明显地模拟出在转盘实验中所观测到的振荡。我急忙转回去确定最好的线性公式的方法,目的仅在于确认,只要在预报中将每个变量取它在一个振荡周期之前所取的值,就可能产生完全的线性预报。这时我才认识到,对于我们的试验,需要一个解是非周期的方程组才可能否定线性预报。当时,我怎么也没有猜想到这个非周期解集合必需具有对初始条件的敏感的依赖性。

这是 1959 年时的事。当时虽然我已经是统计预报界的一员,但我们尽力保持作为一个动力学家的身份。并且我计划参加下年在东京举行的数值天气预报会议。报告的题目是预先约定好的,我碰巧找到了一个合适的方程组,并且完成了我的试验,送了一篇题为“动力方程组解的统计预报”的报告。

如果我那时已经熟悉 Poincaré 在天体力学中的研究工作的话,那么,我就有道理抛弃 12 个方程而转到 Hill 的简化问题的 4 个方程,这 4 个方程除了已经知道具有非周期解以外,这也是容易处理的。我想即使这样的一种转变也不会引起我多大的兴趣,倒是因为知道了确实存在着非周期解的简单系统鼓励了我继续我的探索。总之,我仍然关注着这可能带来的意外的收获。我感到,我需要研究一个耗散系统。这样,我保持了试验参数的新的组合,并使外热源随经度和纬度变化,最后终于找到了长期要寻找的非周期状态。当然,在实际大气中,大气并不直接从太阳那里接受许多热,而是下面的海洋和大陆从太阳那里得到热后传给大气的。大陆和海洋吸收太阳能的容量也是相当不同的,其后,它们及时把太阳能转换到大气中。当我把标准的方法应用到这种新的“资料”时,结果得到很不好的线性预报,我终于感到我的怀疑得到了证实。

这些非周期解以其独有的真实性确实很吸引人。数值方法以 6 小时的增量向前计算给出未来天气,并且我们已经编程序打印时间、以及打印 12 个或 13 个或 14 个变量值,每 4 个计算时间步,

即 1 天打印 1 次。模拟 1 天的计算时间大约为 1 分钟。为了把打印出的数值排在一行上,我将数值四舍五入到三位小数并且不打印小数点。在积累了许多页数的数值之后,我编写了另外的输出程序,让计算机在每一行上打印一个或两个字符,字符距页边的距离表示该行一个或二个所选的变量的值。我常用这种顺序的字符绘制出一条连续曲线图。我时常饶有兴致地观察这种图像的延伸,有时围在计算机旁对明天可能发生什么天气作小小的打赌,正像气象学家常常对明天的实际天气打赌一样。我们很快就认识了一些特殊行为的特征符号。事实上,我们是在人造的大气中学习作天气预报。

图 43 是 15 个月模拟输出结果的复印件,它的原件已经有些褪色了。为了看得清楚,我们把它分成 5 个月一段共三段。所选择的变量是最强西风的纬度近似测量值。强西风高值代表低纬情况。由图可见有一系列的"事件",在每一个事件中数值突然上升,保持 1 个月左右的高值,然后同样突然下降,但是每个事件是不同的,长度甚至是不相等的,因此这一形态明显是非周期性的。

为了更为详细地检查发生了什么,我决定重复某些计算。我停止计算机计算,键入一行数,它是前不久已经打印出来的模拟数值。然后再重新让计算机计算。我在走廊上喝了一杯咖啡,大约 1 个小时,在这段期间中,计算机大约已经模拟了 2 个月的天气。打印出的数值怎么也不像老的数值。我马上怀疑是否是易裂的真空管坏了或其它计算机部件坏了,这是常有的事。但是在要求修理之前,我决定看一看错误到底发生在什么地方,因为这样可以加速修理过程。实际上并不是机器突然坏了,我发现虽然新的计算初值重复了老的值,但是不久以后,数值在小数点后最后一位上差一个接着是几个单位。然后数值又在倒数第二位小数上有了不同,最后又在前面一位小数上有了不同。事实上,这种不同大致总是每 4 天左右增加 1 倍。一直到第 2 个月,新的输出和原输出完全都不相似了。这就足以告诉我们发生了什么事:如果我键入的不正好是原来

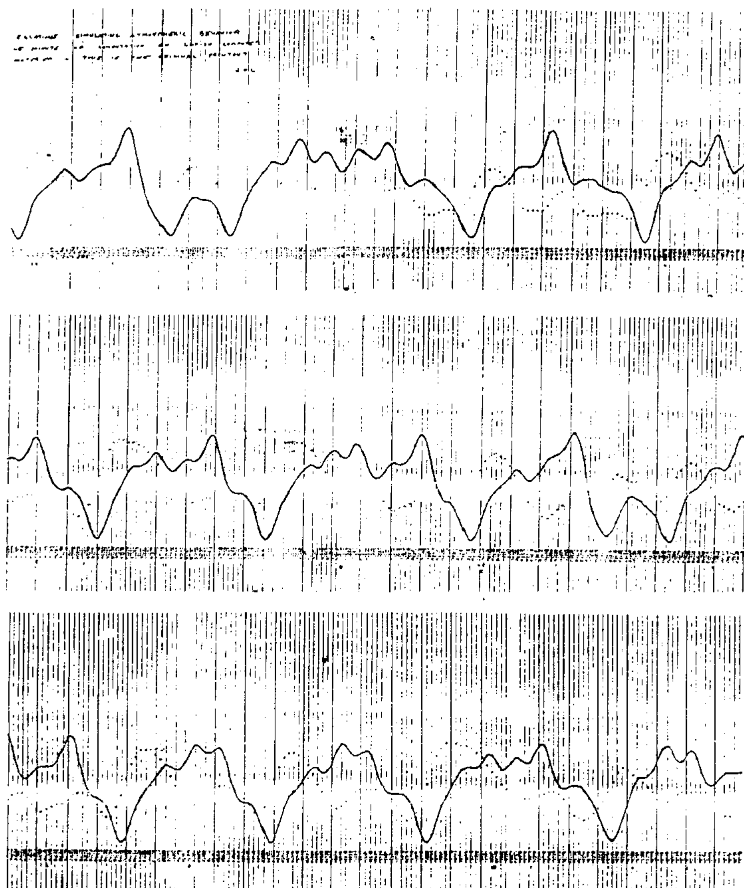


图 43 对于 12 个变量模式的 2 个变量的 15 个月的输出。实线是由 1 个变量的符号绘制，另一个微弱可见的线代表另一个变量。曲线分成 3 段显示，每段 5 个月

的数值，而是键入原来打印输出的结果的四舍五入值，那么这种初始的舍入误差是故障的真正原因，这种误差被不断放大，直到它们

主宰了方程的解。用今天的术语来说，这就是混沌。

这一现象立即使我想到，如果实际大气的形态像这一简单模式的话，那么长期天气预报将是不可能的。温度、风以及其它和天气有关的量，确实不能精确地测量到三位小数。即使能够这样，但是在观测点之间进行内插也不能有类似的精确度。我有些激动，并且很快就将我的发现告诉了我的一些同事。

最终，我确信小的差别的放大是缺乏周期性的原因。后来在东京会议上我报告我的结果时，我加上了一段描述，说明方程对舍入误差的意外的响应。

奇怪吸引子

1971 年我参加了在加利福利亚的拉霍亚举行的湍流会议。许多年长的湍流专家参加了会议，我想照例会听到他们对湍流的一些陈旧的看法，但是有一位新的来客——法国的数家物理学家，D. Ruelle（吕埃勒）——他演讲的题目是“作为湍流的数学解释的奇怪吸引子”。这个题目使我感到奇怪，我甚至问我的一个同事，这个题目是否从原来的法文被翻译错了。他担保没有翻译错，并且Ruelle 报告时说着像我一样流利的英语。我认识到，即使我没有听说过奇怪吸引子，但是我已经看到了一个，现在让我谈谈这方面的情况。

Ruelle 的演讲是他和 F. Takens（塔肯斯）合写的已经出版的文章“关于湍流的性质”的一个概括，在该文中首次提出了“奇怪吸引子”的表述，和 Smale 有关动力系统的论文* 一样，这篇文章是混沌领域中最常引用的一篇。在这篇文章中他们用了螺线管映射（产生图 42 的一个映射）作为一个说明的例子，而且他们把湍流运动描述为“混沌”。

* 即 Smale1967 年发表《微分动力系统》一文——译者注

早在10多年前的东京会议上，我简要提到了12个变量模式中产生的意外的状态，但是当时我认为缺乏周期性和小差别的增长之间的关系及其对长期天气预报的影响则属于另外文章详细讨论的题目。在会上发表的那篇文章中，我是急于用一个更加简单的方程组作为一个主要说明的例子，我希望能够正确说明发生了什么。我曾试图在不损失系统敏感依赖性的前提下进一步简化这个模式，但失败了。实际上有一个方法可以将模式化减到3个变量，但是直到1983年*我才发现它。

我的探索终于在1961年的一个下午突然结束，当时我在旅行者天气中心拜访了B. Saltzmann（萨尔茨曼），这个中心是Thomas在几年前建立的。Saltzmann向我说明了他已经数值求解了7个方程的方程组，这个方程组有点像我的方程组，但是它们描述的是从下面加热而驱动的对流流体运动，例如在热地表上局部出现的运动，而不是主要通过水平加热差异而驱动的全球大气环流。他的兴趣是周期解，并且已经得到许多周期解，但是他向我表明一个解不能逐渐稳定下来。

我急忙查看它，注意到该方程组的7个变量中有4个很快变得非常小。这表明其它3个变量彼此保持继续变化，所以一个仅有3个变量的方程组就可以显示同样的状态。Saltzmann给了我继续下去的启示，回到M. I. T.的第二天早晨，我就将仅有这3个变量的方程组放进计算机上运算，确实同样具有Saltzmann已经发现的缺乏周期性。这就是我们长期寻找的系统，我已经毫不怀疑它是存在的。

无论如何我是很幸运的。该模式的一个基本参数是Prandtl（普朗特）数——流体粘性系数和热传导系数之比。Saltzmann已经选定10.0作为水的Prandtl数的量级。作为一个气象学家，他本可以选择去模拟空气中的对流，而不是水中的对流，在空气的情

* 原书如此，疑为1963年——编者注

况下，他或许会用 Prandtl 数为 1.0。用这个值的话，3 个方程组的解是周期的，因此或许我就决不会有任何理由想到从原来的 7 个方程去提取成 3 个了。

这 3 个方程并不能非常好地描述实际对流运动。但是对我的目的，这并不重要。作为数学的一个抽象，这个方程组说明，一个确定性的系统能够以最简单的方式表现出非周期的形态。图 44 是其中 1 个变量随时间的变化。显然这个系统经历了围绕一个状态作不断放大的振荡，这个状态实际上就是一个不稳定平衡状态。直到这个振荡达到太强以后，它又围绕另一个不稳定状态振荡，一直达到这个振荡太强为止。就这样它连续交替振荡在两个模态之间。图上清楚地显示出一个重要的特点，即围绕一个状态或另一个状态振荡的次数所形成的是一个不规则的序列。实质上，这样的行为与卫星在两个行星之间穿梭运动(如图 36 所见)是有些共同点的。虽然我们未能比卫星运动情况多写出一组公式来表示通解，但是对于所选择的参数值，这个图解实际上已能显示出可能发生的每一件事。这条曲线几乎完全替代了通解。

我决定用这个系统作为例子来写文章详细描述。当时我感到真正的重要发现是如下这个事实，即在相当一般的条件下，没有周期性就意味着有限的预测能力，而不仅仅是发现了带有非周期解的特殊系统。我也认为，并且现在仍然认为在为预测各种现象所付出的系统而大量的努力中，太大的部分都给了天气预报，全世界的观测网和 500 万变量的模式的发展就是证明。无论如何我写这篇文章主要是给气象学家的，并将文章投稿到“*Journal of the Atmospheric Science*”，原来的题目是“确定性的湍流”，后来，在该杂志的编辑(我与他很熟)、大气环流模式的创始人 N. Phillips(菲利普斯)向我说明该方程缺少通常与湍流有关的一些性质之后，我将题目改为“确定性的非周期流”。

我还想办法实现了能直接观看吸引子的长期愿望。我简单地选择了两个变量作为平面坐标，并将第三个变量的数值标在平面

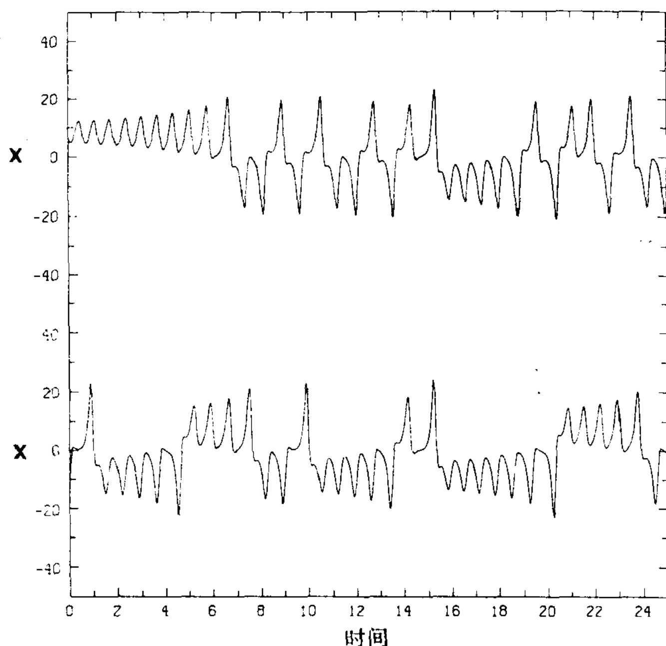


图 44 3 个变量对流系统中的变量 x 随时间变化序列。这个序列延伸到 50 个时间单位，在图上被分成两段

坐标的对应点旁，就像我们常常用纬度、经度作为天气图的坐标，而绘制该经度、纬度上的压力数值一样。然后我绘制第 3 个变量的等值线，正像我们在天气图上绘制等压线一样。当然这要比在天气图上画等压线稍稍复杂一些，因这里变成了在一部分平面上的两组相区别的等值线，这就意味着吸引子是由两个不相同的表面所构成，一个表面在另一表面之上。跟着任一表面的轨道朝向图的底部时，看起来就好像两个表面汇合成一个一样。

图 45 是该吸引子的完全图像，它带有两组归并的等值线，而图 46 表示该吸引子的轮廓和一个位于吸引子之中的伸展的解曲线。从另一个角度来看，曲线像是蝴蝶。在三维空间中，我们能够看到，曲线从一个表面连续通过到另一个表面，曲线本身从不相

交。我决定在文章中详细描述这一吸引子。

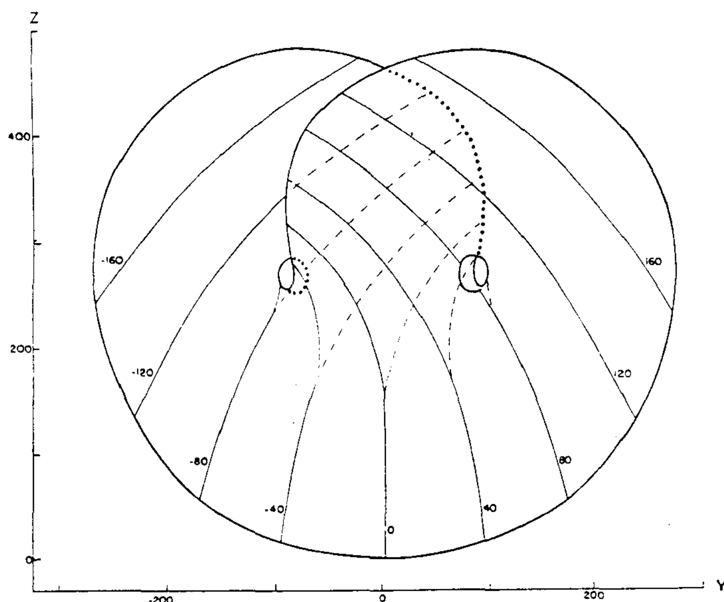


图 45　3 个变量对流系统吸引子的原始图像。用变量 y 和 z 作为坐标绘制出的 x 的等值线。这里有两个可分辨的不同的 x 值，较低值的等值线用虚线绘出。本图引用经美国气象学会惠许

我常常告诉我的学生们，当他们写文章描述他们的研究工作时，要留出比他们所想像的时间要多——如果是论文的话也至少需要一个月。在你想把自认为已经了解了的问题清楚地写出来时，你可能发现，你还不能很好的了解它和解释它，而且你要花相当一段时间从头到尾地想它，也许还要花较多的笔和纸，甚至还要做某些计算。这个建议适合于教员和学生。对我来说，我曾尝试先理解并向读者解释清楚如何这两个表面能够汇合，即使理论表明两个解曲线（这里是每个表面上有一个）决不能汇合。在这种尝试中我认识到这两个表面（不仅仅是曲线）决不能汇合，如果它们汇合的

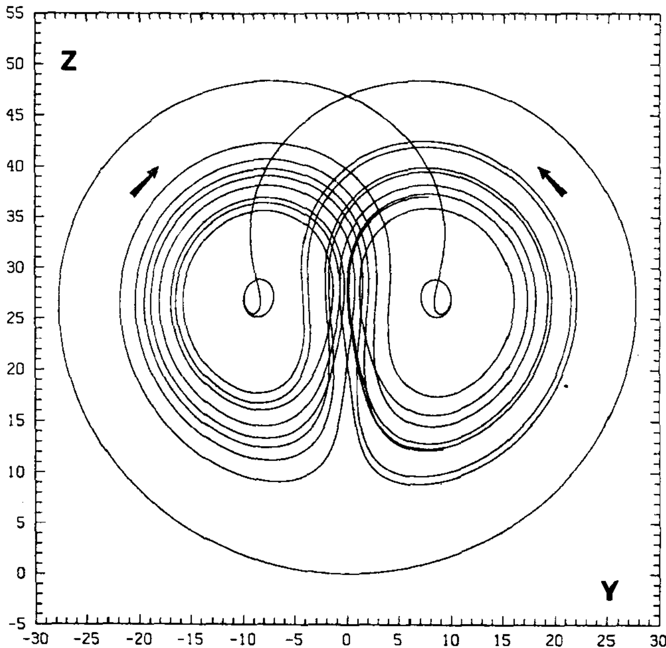


图 46 图 45 中吸引子的轮廓，并显示了包含在吸引子中的延伸的轨道片段。轨道不规则地交替运行，时而顺时针绕左边空穴运行，时而逆时针绕右边空穴运行

话，那么表面上就有一个特殊的曲线将与另一表面上选定的曲线汇合，这就违背了理论。所以只可能是看起来的汇合，而实际上保持独立，各自和解曲线遵循相同的原则。这里一个表面看起来从另一个表面下通过，然后有两个表面就在另外两个下面通过，使得总数为 4，但是要维持它们的同一性，还应有 4 个表面在另外 4 个表面下通过，如此等等。我的最后结论（现在已被彻底证明）是表面实际上有无穷多个，正像我们现在看到的，吸引子是奇异的。那时候，我决没有想到，一段时间以后，这个吸引子已经成为这篇文章最引人注目的特点。

在准备这篇文章时，我已经受到 Birkhoff 处理动力系统的引

导。当我投稿时，相当有责任心和能力的审稿者提出，我的某些结果与 Birkhoff 推迟发表的论文的某些结果相同。审稿者特别提到，由数学家 V. V. Nemytskii（涅梅茨基）和 V. V. Stepanov（斯捷潘诺夫）写的 1946 年以俄文出版而最近被译成英文的专著《微分方程的定性理论》。该书的第二部分是动力系统完整的研究，从该书的题目上人们可以猜到，动力系统是借助于微分方程来定义的。在该书中作者定义了解在“Lyapunov（李雅普诺夫）意义上”的稳定性（俄国数学家 A. Lyapunov 是和 Poincaré 同时代的，并且是稳定性理论的首创人）。它可以表述为：初始接近于稳定解的任何其它解随时间推移仍保持接近该解。简单地说，这就相当于没有对初始状态的敏感依赖性。书的作者们表明，在我所研究的这些方程能明显满足的某些条件下，方程的一个具有 Lyapunov 稳定性的解必然是周期的或殆周期的。关于这个结果的各种证明他们追溯到 1929 年的 P. Franklin（富兰克林）和 1933 年的 A. A. Markov（马尔科夫），他是著名的“Markov 过程”创始人 A. A. Markov 的儿子。

由此可以直接得出，非周期解在 Lyapunov 意义上是不稳定的，或者说是敏感地依赖于初始条件的。进一步说，如果系统的通解是非周期的，那么系统一般的行为就是混沌的。我想我的主要结果突然失去了它的许多新奇性。具有讽刺意义的是，在较早的 50 年代，午饭后在我们学院俱乐部我有时与 Franklin 下国际象棋，他一般赢我，正像他的动力系统的研究结果确实胜过我一样，但我们从未讨论过动力系统。

可是，在那本专著中并没有我所赋予这个结果的意义。全书都没有出现“在 Lyapunov 意义上不稳定”的表述。正像 Poincaré 和 Birkhoff 一样，他们讨论的每一件事都围绕着周期解，人们从来就没有真正意识到从微分方程不规则解本身出发进行研究。

我的文章立即在气象学家中间得到相当大的注意，这多亏了 Charney 的关心，以后他成为我在 M. I. T. 的同事。他不像有些人

对我的文章的看法那样，他相信这个结果，而且他认为这对全球大气研究计划有潜在的重要性。一个结果就是我们用现有的大气环流模式作了可预报性的试验。

不久之后，带有奇怪吸引子的这三个方程显得远远不止是说明简单的混沌状态的抽象手段，而且还能对某些现实世界中的现象作很好的描述。作为一个通常对流的模式，这系统是不完全的，因为它对运动设置了过多的限制。如果你把一盆水放在炉子上并且点着火，那么水是不会像方程所要求做的那样在左边处处上升，在右边处处下沉，或上升仅仅在右边，下沉仅仅在左边，以一个大的涡旋形式运动，而是发展许多小的涡旋。如果这些小涡旋因某种原因被压制的话，那么剩下来的运动就可能比较符合这个方程。

压制小涡旋的一个方法是完全抛弃用盆盛水，而是让水注满一个封闭的环形管，管靠在墙上或保持垂直。在模拟这一过程时，Woods Hole 海洋研究所的海洋学家 P. Welander(韦兰德)发现，当那种环状管在底部以一个合适的速率加热时，管中的水实际上能够首先在一个方向循环，然后又在另一个方向循环，以无规律的方式进行切换。

几年以后，不规则交替环流从物理上实现了。当时同在 M.I.T. 的多才的应用数学家 W. Malkus(马尔库斯)和 L. Howard(霍华德)以及佛罗里达州立大学的 R. Krishnamurti(克里希纳穆尔蒂)暂时放下了他们的笔和纸，而建立起一个水轮，目的在于实现由那三个方程所预测的行为，该水轮一会儿顺时针转，一会儿逆时针转。Malkus 的水轮是一个精确的装置，适合于在实验室控制下做。如果你有兴趣的话，也可以建立你自己的水轮。按照 Howard 或 Krishnamurti 的做法运气或许会好些。

水轮的基本组成部分是一个转台(也可说是一个塑料的转动大餐盘)和一些纸杯。在每个纸杯的底部靠近边缘处简单地做一个小孔，然后将纸杯围绕着转台的周边立起，使杯子底部的小孔伸出到转台边缘外面，并用胶水把杯子粘好。图 47 是这种装置的顶视

图，图中最小的圆表示杯子底部小孔，中等大的圆表示杯底，较大的圆表示杯子的上边缘。最大的圆是从杯子底部通过并用点线表示的转台边缘。

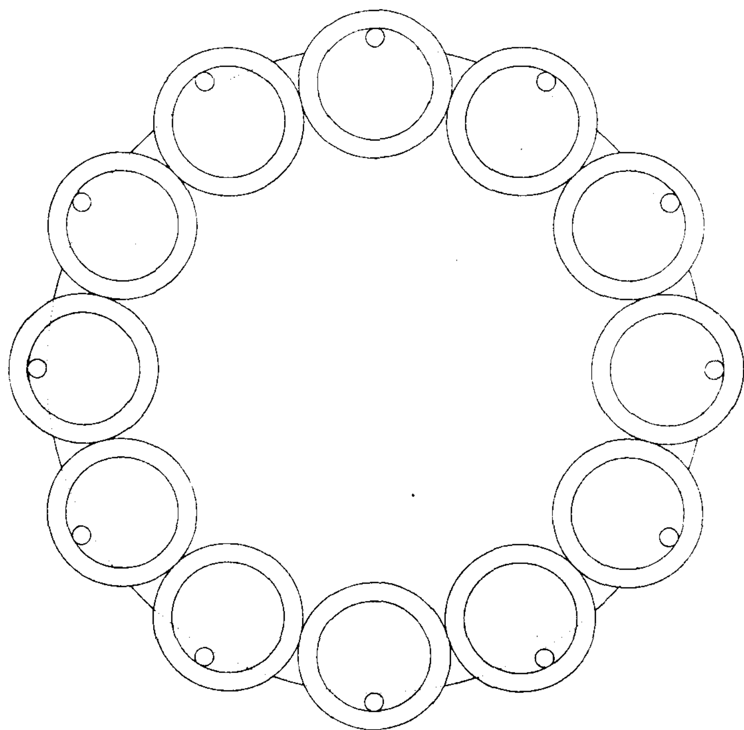


图 47　水轮的顶视图，图中表明 12 个杯子的底部和上边缘，每个杯子底部有小孔

为了运转水轮，使它与水平面倾斜大致 20 度，并且牢牢固定转台的不动部分。然后从一个水龙头或一个软管以一个定常的速率将水注入最上部的水杯。当水杯注满水后，水轮头部就重了，然后转动水轮，让下一个杯子移动到水轮顶部接受注水，而此时第一个杯子的水由底部小孔慢慢漏水。由于轮子以适当的角度倾斜，水

又以适当的速度流出，那么你可能会看到水轮一会儿顺时针转，一会儿逆时针转。

离开实验室而回到图书馆，如果你偶然看到一篇引起你兴趣的科学论文，可能你要进一步去查阅有关的研究，并通过参考文献去查找较早的一些文章。除非你要作历史的评论，一般实际上有兴趣的是关注最新的研究文献。并且你还希望这篇文章能够展望未来，并列出有关的参考文献。这样的目录实际上不久就会出现在《科学引文索引》中，它是在费城科学信息研究所出版的一种很多人要查阅的参考期刊。每2个月一期，然后合并为年刊，并且每5年给出总目录。

其它领域的科学家并不经常阅读气象期刊；要跟上自己专业文献的步伐也是相当困难的。在1970年以前，我的文章几乎清一色地被其他气象学家所引用。只是在1965年，例外地被应用数学家L. Segel(西格尔)的一篇文章所引用。这篇文章研究的是热对流问题，这个问题离气象学并不太远，Segel的文章理应被许多气象期刊接受出版的。从1970年到1974年我的文章仅被非气象学家引用过2次。

如果我的文章出版在数学期刊上，它很可能立即引起混沌界的广泛注意，但可能不会引起许多气象学家的注意。某些科学家实际上把同样的文章写成两篇，而使两篇写出的论文都有用，尽管这是带有讽刺性的，显然，我当时应该这样做以使我的文章获得广泛的读者。

有一件事是决定性的，如果不是对于混沌理论发展的话，那么至少对于我来说是如此。这件事发生在几年以后。马里兰大学的数学家Yorke与Li合写了一篇题目为“周期3意味着混沌”的文章，这篇文章仅是一长串创新的开始。当时A. Faller(法勒)已经离开了Woods Hole海洋研究所并留下了他的8英尺转盘而加盟到马里兰大学气象系。Yorke和Faller聊天时提到他当时正在做的一些工作，而Faller说，听起来好像是我的一篇有关非周期性的文

章。他给了 Yorke 我的文章的复印本，并且复印了许多份送给马里兰大学校园里的许多数学家和其他科学家。不久之后，Yorke 到 Berkeley（伯克利）去拜访 Smale，他向 Smale 展示了我文章的复印件，Smale 继而显然将我的文章复印了许多份送给动力系统领域他所熟悉的人（当时动力系统领域仍然是相对小的领域）。我相信，我的文章使一些人第一次看见了一个具体的奇怪吸引子。

回顾一下，对我来说我的文章之所以不同于以前的文章，并不在于用微分方程产生的个别奇怪吸引子的图像，而是在于这种思想，即重要的是寻找混沌而不是去回避它。无论如何，不久以后讨论这方面的文章就出现了“爆炸”式增长，而且我的文章被多次引用。我想每一个提到这篇文章的人都读过它并受它的影响，但是这种期望也许太过份了。我可能永远也无法知道它对以后发生的事情的影响有多大；而我的文章刚巧在一次注定了的混沌热潮之前为世人所知，这是多么的幸运啊。

混沌的普遍性

在混沌迅速成为关注目标后的几年，我收到一篇题目奇特的文章“Lorenz 纽结是最基本的”的单行本。我并不认为我的文章中谈过什么纽结，也从来没有听说过纽结，更不用说最基本的纽结了。纽结是西北大学的拓扑学家 R. F. Williams（威廉斯）提出的，几年前我在加利福利亚大学伯克利分校拜访 Smale 时见过他。拓扑学是数学上一个兴旺的分支——它开始于 Poincaré 创新中的一个方面。纽结理论本身也是拓扑学的一个分支。

拓扑学是处理曲线、曲面或更为普遍的点集连续通过伸长、压缩或弯曲而不变化的那些性质。对拓扑学来说，一个圆和一个方形是同样的，因为任何一个很容易弯曲成另一个形状。在三维空间中，一个圆和一个带有一个反手纽结的封闭曲线在拓扑学上是不

同的。因为,怎么也不能通过弯曲、压缩或伸长去掉这个纽结。Bob* 称我的结果为蝴蝶形状的吸引子,而且他已经指出处在该吸引子上的某些封闭解曲线是纽结的。

图 48 给出了其中一条解曲线的示意图,曲线的两个分支相交叉,下面的一支用断线表示。看着图,我会想到它或许可以打开成一个圆。但是当我们用一根长绳连接末端来复制它并尝试展开它时,它却是熟悉的反手结,在纽结理论上称为三叶形。

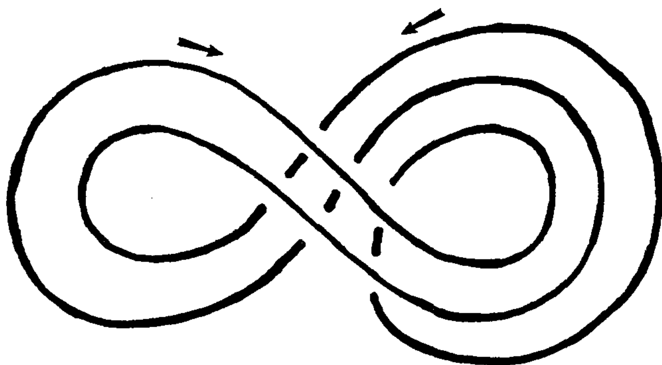


图 48 包含在 3 变量对流模式吸引子中的封闭曲线示意图。曲线在三维空间中,两根线显示出交叉,断线处在实线下方,这曲线包含一个不易看到的纽结

这一研究是相当专门的,但是它代表了许多无法抗拒奇怪吸引子诱惑的拓扑学家们的努力。他们遇到许多新的点集,并尽力探究一些问题诸如吸引子中无穷多的页片是如何连结在一起的。

其他一些数学家迷恋于分岔(当系统的参数值稍稍变化时,系统的行为以及通常还有复杂性所发生的突然变化)。我们已经在斜坡模式和圆盘实验中看到了分岔的例子。还有些人则转向于研究带有复杂岛屿的混沌海(奇怪吸引子在 Hamilton 系统中的对应)。

* Robert F. Williams 的简称——编者注

或许混沌热潮的更为显著的特点是从一个尝试的领域拓展到其它领域。对于混沌的一般认识很快就从数学、天文学和地球科学渗透到物理学、化学和生命科学，并最终进入到社会科学和艺术领域。在混沌热刚刚爆发之前出现的、起到导火线作用的文章中，由于某些理由我只对其中一小部分文章特别感兴趣。

在这些文章中，首先是普林斯顿大学的数学生物学家 R. May（梅）在人口动力学领域的开创性工作。他的动力系统是由一个单变量的差分方程组成，这个差分方程和 Logistic 方程密切相关。一个选定种群（例如昆虫）的数目，从一年到另一年常常发生很大的变化，而且一年中的总数有时候是对下一年种群总数的很好的预报因子。和单摆以及滑板不同，昆虫数目不符合“牛顿定律”。而且我们建立的方程一般要显示出合理性。习惯的假设是，如果昆虫数目非常小，那么昆虫将自由增殖，在下一代产生比较多的昆虫，但数目仍然相当小。如果昆虫数目比较大，它将产生非常多的后代，但是不能得到足够保证它们成活的食物，所以下一年昆虫的数目还是少了。因此最大数目应出现在中等数目的下一年。May 发现，对于合适的繁殖率和饥饿死亡率，昆虫数将混沌地涨落。

在早先不久，我已经研究过一个和 May 类似的方程，但只是把它当做了纯粹的数学抽象。而 May 的工作却赋予这一方程以现实的意义，正像应用数学家的水轮一样。

此外，在较早期的工作中，还有 K. Robbins（罗宾斯）的研究，那时他是 M. I. T. 的研究生，他考察了圆盘发电机及其在揭示地球磁场中的作用。另一个是斯图加特大学的 H. Haken（哈肯），他研究激光。有兴趣的是，在两项研究中的方程看起来都非常像我的方程，并且他们的解也是非常相同的。圆盘发电机和激光器是不相同的，它们中的任何一个都不像热对流，但三个系统都做了相当的简化，以致于简化后剩下的部分十分相似。实质上，我们常用这类简化去识别出物理上不同系统的相似部分，否则就无法看出这种相似性。

我对 O. Rüssler(鲁斯勒)的研究的心情是复杂的，当时他在蒂宾根大学建立了三个微分方程的方程组作为一个化学反应的模式。那时候，许多带有混沌解的微分方程组已经被发现，但是我认为我发现的方程仍然是最简单的。Rüssler 改变了这种情况，他的方程比我的更简单。迄今他的记录仍然保持着。

现在来谈谈最近的发展，让我再一次简短地从生命科学开始。各种疾病的爆发，在某种程度上是微生物和它们的受害者的人口动力学现象，它已经用像控制单一种群动力学的方程来研究。常用两个差分方程，一个是用于捕食者，一个是用于宿主。带有偶然心律不齐的心搏问题已经受到相当的注意，由于心脏在我们生命中的决定性作用，关注它是不奇怪的。区域、国家和世界经济实力如同心脏的健康一样，涉及到许多人，但不能期望通过相似的方法来检验。

过去的许多经济学家都认为经济具有平衡状态，并且认为经济会稳定到这个状态，如果我们不再插手经济的话(简而言之，也就是如果经济不受到可变的强迫作用的话)，就不会有任何使人烦恼的经济周期。现在某些关注混沌的经济学家提出，经济学作为一个动力系统是混沌的，不规则间歇的经济周期是不可避免的。对经济进行干预可能压制这种周期，而不是产生这种周期，但是更可能的是缩短一些经济衰退而延长另一些衰退。

正像近似正确的气象方程是基于牛顿运动定律和其它涉及到最微小的天气元素(小到足以看作为质点的空气)的定律一样，任何近似正确的经济学方程也要基于复杂得多的控制基本经济元素(人和他们的产品)的定律。正像天气学家已经从经验中认识到空气质点的巨大聚合体(风暴及其结构)通常呈现何种形态一样，经济学家也已经从经验中认识到人们的各种聚合如何能够影响经济。经济学家已经建立起了包含一些假设的相互作用的简单方程组，而且他们在某些情况下遇到了混沌解。

现在来谈艺术。我们首先考察音乐。这里可以有两种不同的

方式涉及混沌。第一种是音乐乐器的音调。一根弦或一个空气柱或小到一块薄膜,通常以一个强周期的分量振荡,这一分量相应于一个基本音高。典型的是泛音,它给乐器贡献一种有特色的声音,但是常常有不规则的分量进一步修正这种音调,这些不规则的分量在某些情况下是混沌的而不是真正随机的。当我最近拜访华盛顿大学音乐系的 D. Keefe(基夫)时,我才惊奇地知道,萨克斯管的标准音调不是混沌的。但是,当吹萨克斯管同时吹奏出两种不同音高时所产生的复合音调中,似乎又充满了混沌。

音乐中相当多不同形式的混沌还没有被发现。在作曲过程中已经引进了这些混沌。除非一支乐曲被有意识地作成缺乏结构而外,都可能有着早先某些主旋律的再现。这些主旋律如果不是呆板地重复,而是包含一些预料外的成分,它们通常是引人入胜的。请听 Brahms(勃拉姆斯)的几乎任何一支主要作品(例如他的第一交响乐第三乐章),你能听到他在说着什么,然后他又第二次用一种稍有不同的声音说着它,第三次再用更不同一点的声音说一遍。

简单方程组的混沌解以它们常有的近似重复但却不是完全重复而著名。有时候要重复一个以上的"主旋律";由天体力学方程产生的图 36 就是证明。早期的作曲家需要设计变奏曲,而当今的某些作曲家用多种办法把简单方程解的涨落化为音调的序列。类似的方法已经用到视觉艺术中去了。

不久前我收到 C. Lockett(洛基特)寄来的一个意外的但却是令我高兴的包裹,她当时是俄勒冈大学美术班的学生。包裹中有一盘她制作的录像带。播放时可以看到在黑暗的背景上有 3 条垂直的亮线,不久它们就跳起舞来,在差不多 4 分钟内亮线沿着蝴蝶吸引子的路径跳舞,时而会合,时而分离,她十分恰当地称它为风中舞蹈。

建造你自己的混沌

在我最初邂逅奇怪吸引子以后的几年中，我对混沌的兴趣集中在它对天气预报的影响上。大约在10年后，我开始被邀请去谈吸引子的问题，并且了解到东道主们所做的一些工作，这时我的兴趣才扩展到更加一般的方面。一些人虽然对混沌着了迷，但仍然认为，规则性是常态，而混沌只是例外，至少由简单方程组所构成的系统是如此。我的感觉则与此不同，我很想驳倒这种想法。为此，我试图构造具有非周期行为的其它简单的系统。我的运气并不好。迟至1980年，在一篇为气象界说明吸引子重要意义的文章中，我才发现选择一个可以简化到约20年前我所遇到的那样的方程组并非难事。

不久以后，我的好运来了。我检验了一个又一个方程组，证明了它们有混沌解。有时候似乎我很难避开混沌。方程组决不会突然改变它们的性质，所以我从直觉上感到我一定是已经改变了我的寻找混沌的方法。后来混沌逐渐被认为是普遍的，会出现在各种现象中，如经济周期、音乐声调，但是现在是另一种形式的普遍性。随手写出的方程组就很可能具有混沌行为。现在我能很容易地写下一个配方，按照这个配方你能够建立你自己的混沌。

映射比流更容易设计。为了避免有许多点跑到无穷远，想像一个有界区域，例如一个方形。在一个方向伸长这个方形（例如水平伸长），而在另一个方向压缩这个方形（例如垂直压缩），然后弯曲它并嵌入到原来的方形内，看看会有什么结果。于是原来方形中的每个点和通过伸长、压缩、弯曲和叠合后的点之间建立了一个映射。如果你要用多于两个变量来做（假设是在计算机上做），那么就取一个立方体或一个多维盒子，并且在使它作其它变形之前至少在一个方向伸长并在另一个方向压缩。

也可以不去将方形体弯曲，而是把经过压缩和伸长的方形分

成两块或多块并把它们嵌入到原来的方形中。于是，你建立了一个不连续的映射。同样，你可以略去或减少压缩过程，而是把被弯曲或被分开的伸长方形的两个或多个部分嵌入到原来方形的同样部分上。然后你就可以得到一个不可逆的映射。不可逆映射是一种你并不总是能从现在的状态推出过去的状态的映射。当然，你也可以把压缩过程和弯曲过程一起略去，但是如果你略去伸长过程，那你就将得不到混沌，这是因为相近的点将不会分离开来。

产生图 12 和图 16 中的奇怪吸引子的映射是在斜坡模式中取 y 作为一个坐标的 Poincaré 截面而得到的，它是一个不连续的映射，因为它们被限制在一个基本的方形区域中。当一个滑板或雪橇移出一个边时，便会有效地跳到相反的一边。现实中一个在水平面上滑动的滑板是一个不可逆的系统，因为它不同于摩擦阻尼正比于速度的数学上的滑板，实际中的滑板并不是慢慢地并一直慢慢地移动，它采取突然停止的方式。如果我们在滑板仍在移动时来观察滑板，我们能够预测滑板将在什么时候、什么地方停止，因而可以预测 1 分钟后滑板停在何处。但是，如果我们在滑板已经停止以后再去观察，那么就一点也没有办法说滑板是何时停止的，也一点没有办法说滑板在 1 分钟前在什么地方。

为了构造一个特殊的连续可逆二维映射，我们取一个方形，并且从一边到另一边绘制两条曲线，见图 49。这两条曲线不应互相交叉，也不应穿过方形的顶和底，并且任何一条曲线和任何垂线相交只有一次。

为了产生一个点序列，给定一个点(例如图 49 中的点 A)，我们作连续映射。首先，将方形逆时针旋转 90°。那么点 A 就映射到点 a，用另一方法当然会有不同结果，你可以顺时针转，也可以沿任一条对角线翻转。第二，在方形中压缩每个垂直线使点 a 映射到两条曲线之间。例如点 a 是处在方形底到顶的 3/4 路程上，那么映射出的点 B 和点 a 在同一条垂直线上，且 B 处在从下边曲线到上边曲线的 3/4 路程上。这样 B 就是点 A 被映射的点。重复上述两

个步骤，那么就产生点 b 和 C，点 c 和 D 等等。请注意，这有点像产生图 41 的马蹄的过程。

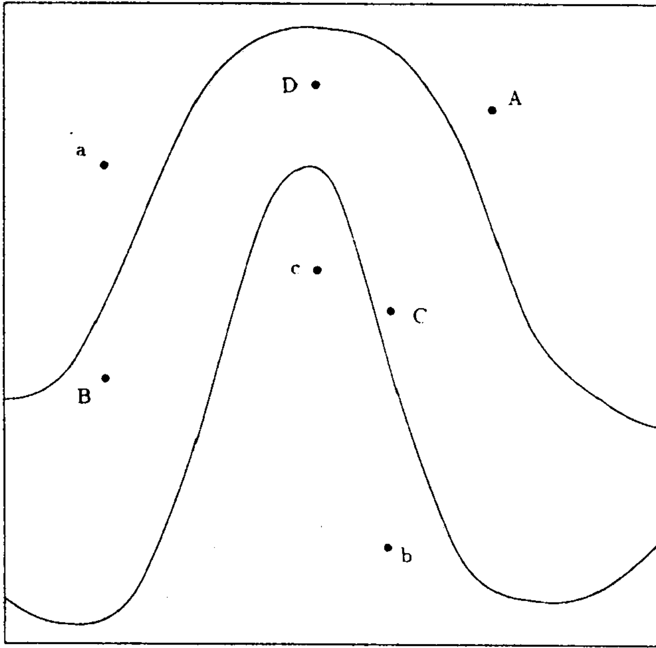


图 49 在方形区域中构造混沌映射。表明一个方形以及限制在两边的两条曲线，方形被映射到两曲线间的区域。点 a、b、c 是点 A、B、C 通过方形逆时针旋转 90°而来，点 B、C、D 是由点 a、b、c 通过垂直压缩而来，它们是点 A 的第一、第二、第三个图像

这个过程并不能保证产生混沌。如果你的曲线有比较陡的斜率，则多半可能会成功。应该注意，伸长和压缩发生在第二步。最初是水平分开，在旋转或翻转以后垂直方向才分开的这些点将相互靠近。而最初垂直方向分开点将相互远离。如果远离的运动超过靠近的运动，就能发生混沌。

除非你用高质量的绘图装置，否则你可能错放了一个点，紧接

着该点以后的点就错放得更加历害。这样，在放了 20 个左右的点以后你会感到非常乏味，如果你将它们与下一个同样产生的 20 个点序列相比较，就足以看到系统对初始值的敏感的依赖性。然而，这样做是不足以产生缺乏周期性的情形，也完全不足以揭示奇怪吸引子的奇异性，那是需要成百上千的点的。因此，我们竭力推荐放弃绘图的方式而改用计算机。对于曲线，你需要用到以一边的距离表达底边上高度的公式。

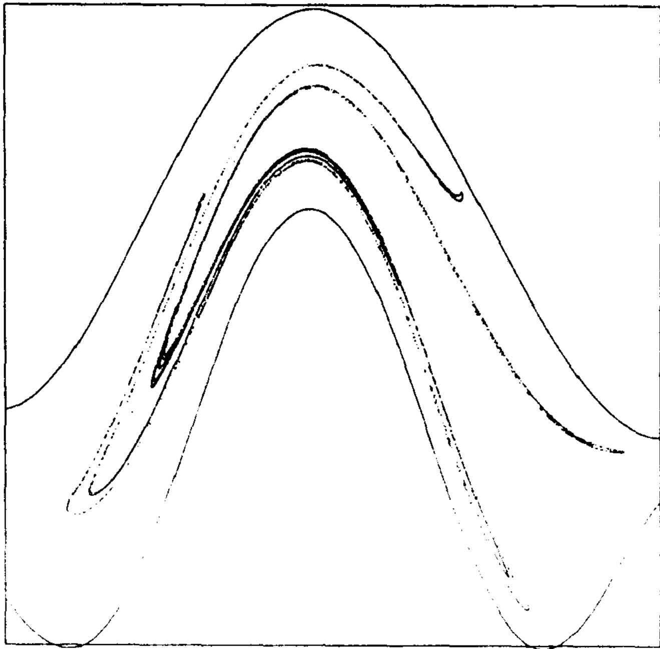


图 50 图 49 的方形，对两曲线用 8 次多项式近似，映射的吸引子处在两曲线之间

图 49 的曲线是用手绘制的，而图 50 中的曲线是用便于计算机运算的公式近似算得的，显然有些点上不十分符合。点 A 仍然被选作初始点，并且产生了 10100 个点序列。删除作为可能代表暂

瞬状态的头 100 个点，把剩下的点都绘在图上，就可以清楚地看到一个奇怪吸引子，它必然处在两条曲线之间。

如果你偏爱直线，那么你就转到 Smale 马蹄的形式，它可以避免点的映象跑到方形以外的问题，而保持所有映象都在方形内部。让图 51 中的虚垂线将方形分成三个窄长条，而图中实线又把一部分方形分成三个梯形。垂直压缩左边的窄条，然后水平伸长它，且底部要比顶部伸长得多些，所以它正好嵌入下部的梯形。同样压缩中部的窄条，逆时针转 90°再垂直伸展它就嵌入右边梯形。将压缩的右边窄条转 180°则嵌入上部梯形。窄条宽度和梯形宽度可以随意改变，在计算机上你需要三对方程来进行——每个窄条一对。

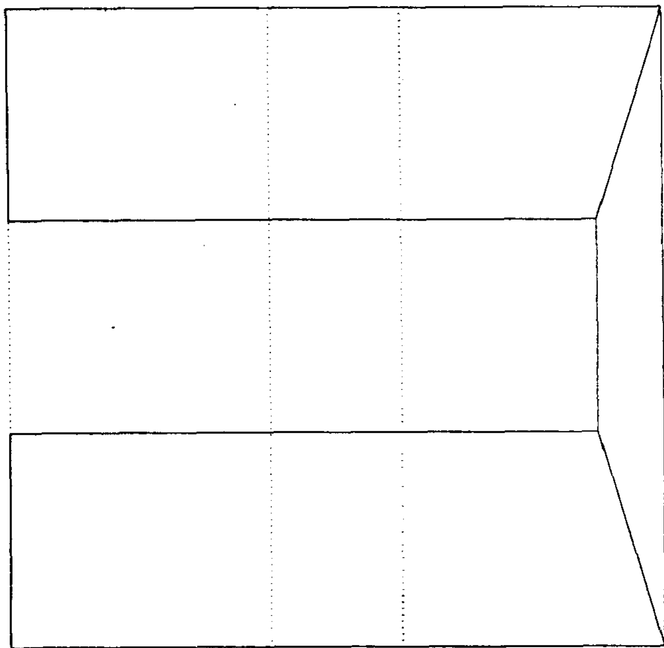


图 51 方形区域混沌映射的构造，用虚垂线将方形分成三部分，这三部分被映射成三个梯形

此时，仍然不能保证一定能产生混沌。我最初几次试验是不成功的。诀窍似乎是使右边梯形非常窄——其宽度可以为方形宽度的 1/10。图 52 给出了通过一次成功试验所产生的奇怪吸引子。令人有些惊奇的是，短的暗色条纹会在各处以任意倾角出现。



图 52　图 51 的映射的吸引子

我不能给你用计算机产生最有趣的吸引子的方法，但是你现在应该能自己做了。无疑，你将会发现处理映射比处理流更容易。通过选择不可逆映射，你能产生一些新的结果。图 53 是我喜欢的一个例子。图中的三个飞行物虽然奇怪，但决不是不可识别的飞行物，如何识别，请参见附录 2 的第一节。

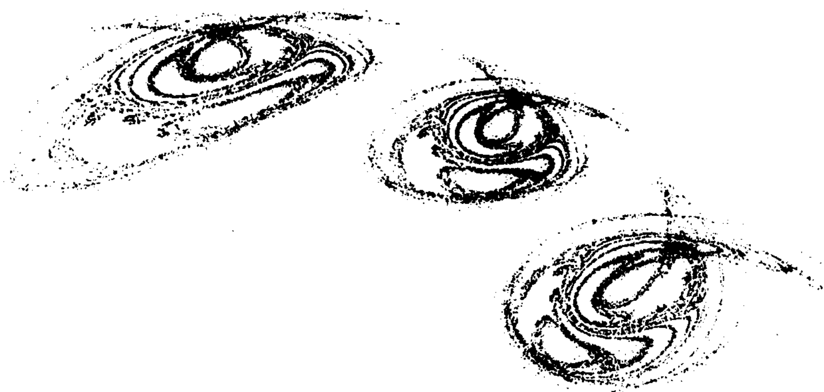


图 53 飞行物体:二维不可逆映射的三片 8 字型吸引子

随机性是混沌吗?

我们可以看作具有混沌行为的现象已经如此之多,以致于很难编成一个综合目录。我仅仅对它们进行抽样取例。虽然混沌现象仍在不断发展,但基本上有以下两类情况。我们可以相信,某些现象是由确定性规律控制的,并且以规则的方式产生响应,仅仅发现在某些点上它们的行为比我们估计的要不规则一些。在 Poincaré 的发现之前被认为是相当规则的一些天体运动就是一个经典的例子。另一方面,我们也可能相当了解一种现象的不规则行为,但是,我们可能认为这些行为是由某些固有的随机性造成的,只是在后来才发现这种现象服从规则的定律。有些人可能会把破碎的海浪归于这种类型。这里,我采用了更不严格的混沌概念,它包含一些真正随机性的过程,但在去除随机性以后,这个过程仍然具有混沌的行为。

我现在要论述的问题是,是否混沌如此普遍存在,以致所有的

或大部分的仍然被看成随机行为的过程都应该当作混沌行为来对待。实质上，这正是 Poincaré 在他的有关随机的论文中所提出的问题。也许已不必在他所说的话上再补充什么，但是混沌现象是如此丰富，值得根据我们的理解去重新回顾一下这个问题。

在进行讨论之前，我们需要考虑人类或其它生物的自由意志问题。我们大多数人大概相信我们对给定的环境的响应方式不是预先决定的，我们能自由选择。为了论证起见，我们假设这种观点是正确的。因此我们的行为在广义上是一种随机形式，即会有多种可能。

除了由理智的行为所产生的不规则性以外，其它所有不规则性都是混沌而不是随机吗？一个简单的例子说明这是可能的。假如我们停下来去观赏有金色明亮色彩叶子的一棵枫树。每次偶尔看见一片树叶不规则地从树枝飘到地下，我们所看到的是混沌还是随机呢？

非常可能一阵风首先将树叶从树上刮下来。树枝也可以被晃动，所以当叶子开始下落时，风将决定这根树枝的位置。即使有其它原因使树叶离开树枝，但是在其下落到达地面的过程中风也要按照空气动力学定律来控制它。

树叶下落时的 15 秒左右所吹过的风是全球天气系统的一部分，即使是非常小的部分。如果我们承认天气是混沌的一个例子，那么我们就不得不说风是混沌的，因而树叶下落也是混沌的。在叶子下落前不久，或许仅仅前 1 分钟，或许是 1 天或许多天，假设有某一人类活动(它肯定会比蝴蝶活动更强有力)改变了随后的天气趋势，其中自然也改变了吹动树叶的风。然而，我们已经承认，只要在没有我们干扰下天气仍具有不规则行为，那我们看到的就是混沌。请注意，我们过去的活动，由于改变了风，因而会改变叶子下落的路径，但是也会使它改变到另一我们事先预测得很好的路径。我想，其它许多不是主要依赖于生命活动的貌似随机的现象也能够用类似的方法分析。

当然，我们还没有考虑很大一类随机现象——发生在亚原子尺度并受量子力学定律所控制的随机现象。这里有一个基本前提，即事件是在随机间隔的、离散的时刻发生的。因为所有物质最终都可以分成亚原子粒子，那么是否意味着所有物质都有随机行为呢？确定论仅仅是一种抽象吗？

或许如此，但是如果我们还是采取不太严格的解释，那么就仍然是混沌。我推测，如果量子事件在规则的、可预测的瞬间发生，或者在由混沌确定的瞬间发生，而不是随机发生的话，那么摆动的单摆、滚动的石头、破碎的波浪和其它许多宏观现象的普通行为将不会有引人注目的变化。

让我们转到另一种可能性，即：宇宙将来的演化（包括其中的生命活动）早已决定了，我们表面上的自由意志或许只是一种错觉。持这种想法的人使我们感到惊奇，但几个世纪以来许多哲学家都提出过这种思想。可能人们最经常地把这想法与法国数学家 P. S. de Laplace（拉普拉斯）联系在一起，他比 Poincaré 早一个世纪。

我已经遇到这样一种想法，即：如果事情是完全决定论的话，那么我们就应该改变我们对我们同胞的看法，例如我们就不应该处罚凶杀犯或其他犯罪的人，这是因这些人要犯罪是早已决定的，他们对此无能为力。这种想法并未能掌握决定论的全部含义。如果某人犯凶杀罪是早已注定的，那末根据同样理由，我们是否要处罚他也是早已注定的，我们对此也同样无能为力。实质上，我们一些人不相信事先决定论，而认为我们能有所为这一点也是注定了的。

究竟我们应该选择相信每件事都是早已注定了的还是相信我们可自由决定呢？我相信，如果我们能像数学家那样，在企图达到结论前要引入一定的前提，就能得到适当的答案。我们的前提是我们应该相信真理，即使它会伤害我们；而不是相信谬误，即使它使我们高兴。

所以我们必须完全相信自由意志。如果自由意志是一个现实存在，那么我们就会作出正确的选择。如果它不是现实存在，我们也不会作出不正确的选择，因为我们根本不能作任何选择，因为我们连这样做的自由意志也没有。

第五章　其它混沌

非线性

大约在混沌研究已经相当普遍的时候，原先已按三个不同方向分刊的期刊 *Physica* 又建立了第四个分刊 *Physica D*，该分刊专门讨论非线性现象。在这一分刊出现前几年已创立另一种期刊，《非线性分析：理论、方法和应用》。几年以后期刊《非线性》第一卷第一期问世。这些期刊的投稿者代表了许多学科领域，并来自许多

科学研究所，包括洛斯阿拉莫斯国家实验室的非线性研究中心、得克萨斯大学的非线性动力学中心和加利福利亚大学的非线性科学研究所。他们的稿件涉及到哪些内容呢？许多情况下就是混沌。

“非线性”和“混沌”是同义词吗？根本不是。首先不同在于前者有单一的意义。一个线性过程是这样一种过程，如果初始时刻任何变量的一点变化会使得在以后的时间内这个变量或其它变量也产生一点变化；则在同样初始时刻2倍大的变化就会使得在以后的同样时间内也产生2倍大的变化。你可以用“一半”或“5倍”或“100倍”来代替“2倍”，上述描述仍然成立。因此，如果在图上对应相关初值绘出任何变量以后的值时，那么这些点将处在一条直线上。“线性”这个术语因此而来。一个非线性过程简单地就是一个不完全的线性的过程。

或许，最熟悉的真正线性过程是我们自己已经建立起的那些过程。一个简单的例子是买食品或其它物品，假如买大量物品时并无减价可言的话。如果我们买一打鸡蛋花了1美元，那么另外的人买2打同样大小质量的鸡蛋就要花2美元。

正像实际的物理系统很少是具有真正严格的确定性行为一样，也几乎没有严格的线性系统。线性过程的重要性可归结以下两点。第一，许多实际的现象在所限制的时间内和限制的变量范围内近似可看成是线性的，所以通常的线性数学模式能够模拟它们的行为。一个摆动角度很小的单摆可近似看作是线性系统。第二，线性方程可以用许多方法处理，而这些方法对于非线性方程却是无能为力的。

不用借助于很多数学分析就容易看到，滑雪斜坡模式是非线性的。设滑板开始静止在雪丘正东1米的点上。它开始要沿最陡的方向下滑，所以大体上要滑向东南。设第二个滑板处在同一雪丘的东面5米处，它的行为正像第一个滑板一样，因为它要滑向下一个雪丘的东面1米。

如果系统是线性的话，那么第三个滑板在前两个滑板的中间

开始的话，它就要保持在前两个滑板中间并也滑向东南。但是，由于它是在第二个雪丘以西的 1 米处开始的，所以它实际上多多少少要滑向西南方向。

同样理由表明，任何混沌系统必然是非线性的，假如系统的每一变量都限制在某个范围内的话。凤凰城的温度就是这样一种变量，不管居民用什么方法去测量，它总不可能接近于水的沸点温度，也不能低到在阿拉斯加中部所常遇到的低温。如果全球天气形势实际上对蝴蝶翅膀拍打非常敏感的话，那么终会有这样一个时刻凤凰城的温度比没有蝴蝶时将要高出 10 度；如果天气系统是线性的，那末 100 倍大的扰动(这可以很容易地由海鸥翅膀的拍打产生)就要使凤凰城的温度高出 1000 度，这显然是不可能的。即使天气对于蝴蝶不敏感的话，这个论证仍然成立；一个混沌系统是这样一个系统，在该系统内目前状态的很小差异将导致以后某一时刻所能出现的最大差异。如果这种系统不是非线性的话，一个适当形式的中等大小的差异，将会导致以后的差异过大以致不能出现。

虽然混沌要求非线性，但非线性并不保证有混沌。一个简单的例子就可作为充分的证据。大家已熟悉的滑雪斜坡就是这样一个例子。设此例中雪丘高出相邻洼地高度减小到 50 厘米。此时我们看到滑板向前或向后摆动一个短时间后将一直连续滑向东南方，或者以一种规则周期的方式一直滑向西南方。在这状态中只要有一个轻微的扰动就将产生新的路径，然而不久又集中到原来的路径上来。

似乎并不特别惊奇的是，当某个起扰动作用的影响的强度超过一个临界水平时，系统的状态能发生质的变化。然而，当我们详细考查分岔时我们看到，混沌在雪丘高度为 43 厘米时又会出现，而雪丘高度在 40 厘米时混沌又消失。当我们进入非线性王国时，这类行为倒是一个令我们惊奇的例子。

复杂性

在下面我们将看到的三张图,两张是由计算机产生的,一张是照片。你认为哪一张图是最复杂的呢?

如果你和一位朋友对比答案并发现不一致的话,这也无关紧要。“复杂性”正像“混沌”一样有许多定义。

从“复杂性”即是“由许多部分所组成”这种非专业的意义上来说,很难有什么东西会比图 54 给出的那个系统更为复杂的了,而图 54 仅仅给出了这一系统的很小一部分。这个迷人的系统即是 Mandelbrot(曼德尔波罗特)集。在图上用了足够的周围的点使其可辨。增加更多的周围的点,可以得到许多的美丽的图像,表现出错综复杂的交错波纹、星条、宝石和海马。

Mandelbrot 集是一个相当简单的数学概念。为了绘制它的一张图,我们设平面上一个位置为“原点”,并选择另一个位置为“关键点”。然后让一个点从原点开始,它按照一定的规则在平面上“跳跃”。该规则规定了该点借助于关键点将要跳跃到特定的位置,和该点已经跳开的位置。在附录 2 的 Logistic 方程的讨论中有这个规则。偶然情况下也许第一次该点就跳到关键点。如果该点逗留在围绕原点所限制的区域中间,那么这关键点就处在 Mandelbrot 集上,我们就将它绘下。然后我们对于大量的关键点集合中的每个点重复这个过程,而不改变原点或规则。

我们可以想像其关键点刚刚在 Mandelbrot 集以外的一个点,它跳跃的方式至少在暂时一段时间很像刚刚在 Mandelbrot 集内的邻近关键点的点。情况确实是这样的;其关键点刚刚在 Mandelbrot 集外的点要经过多次跳跃才离开限制的区域。为了构造这张图,我取了 200 万个关键点,它们是从该图覆盖的区域中随机选择的。而且我总共绘制了 83423 个关键点,它们的有关跳跃点在经过 68 次跳跃之后尚未离去。

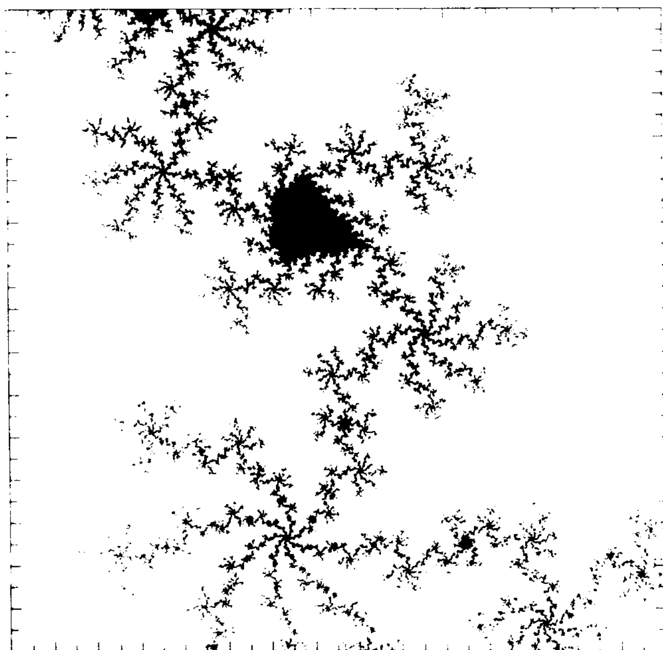


图 54 Mandelbrot 集的一小部分，有足够的周围点使其可见水平范围从 −0.664 到 −0.634，垂直范围从 −0.498 到 −0.468

还有什么比 Mandelbrot 集还要复杂的呢？可能是整个全球天气，也可能是人体的解剖结构。

正像有的研究中心致力于研究非线性一样，在伊利诺伊大学也有复杂系统分析中心，在华盛顿的海军研究实验室有复杂系统理论研究部门。正像有的期刊专门讨论非线性一样，自 1978 年起就有《复杂系统》杂志。正像研究非线性常常要讨论混沌一样，研究复杂性也常常讨论混沌。实质上，复杂性常常用来指示对初始状态的敏感的依赖性以及与这种敏感的依赖性相联系的每一件事。

按照这个定义，图 55 就是最复杂的。它是由京都大学 Yoshisuke Ueda（上田皖亮）所发现的奇怪吸引子族中的一个。像图 32 的 Cartwright-Littlewood 吸引子一样，它是周期强迫耗散

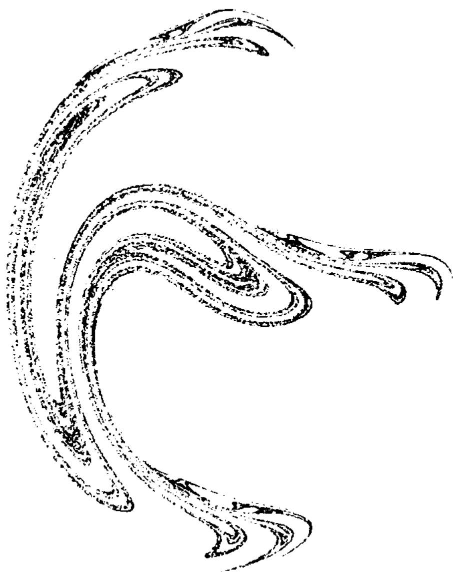


图 55　日本吸引子的一种型式

系统吸引子的一个 Poincaré 截面(这里则是所谓的 Duffing 振子),但是这里看不到相似的东西。上田皖亮早在 1961 年就已经发现了奇怪行为的证据,但是更高分辨的图像必须等待高性能的计算机。最近,他生动地描述了在使自己的想法得到认可时所遇到的困难。在一篇总结性的文章中,D. Ruelle(吕埃勒)把上田皖亮的原来的吸引子描述为迄今所产生的在美学上最令人欣喜的奇怪吸引子(图 55 是比较奇异的),并把它称为一个日本吸引子,但是,最近去京都访问上田皖亮的实验室时,我才知道,这个吸引子已经被称为日本的吸引子。

相反,在混沌行为的意义上,Mandelbrot 集并不是复杂性的一个结果。许多关键点在 Mandelbrot 集上的跳跃点跳跃时并没有表现出对初始状态的敏感的依赖性,而且它们宁愿围绕着周期序列跳跃。只有关键点在 Mandelbrot 集边界上的那些点是例外。

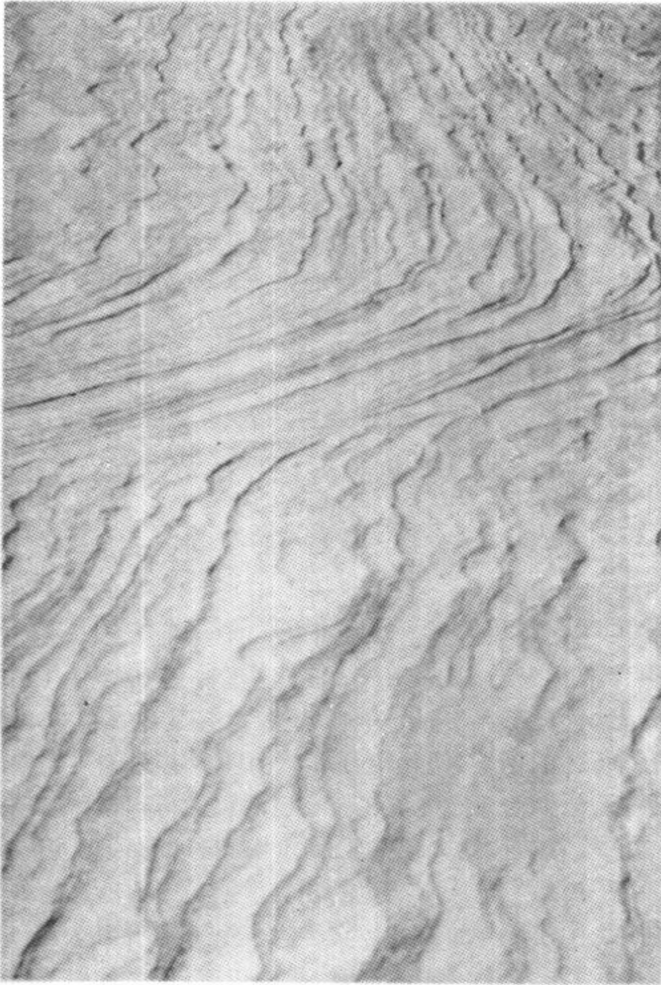


图 56 堆雪场中的一些风纹理

有时要在“混沌”和“复杂性”之间作一个鉴别，前者涉及时间上的不规则性，后者意味着空间上的不规则性。这两种类型的不规则性常常同时发现，例如像在湍流流体中那样。

复杂性常常用在另一种意义上去表征我们在描述或构造一个系统时所必需遵循的一组指令的长度。按照这个量度，图 56 是最复杂的。它看起来多少有点像一个奇怪吸引子的部分——暗的弯曲线被宽的亮的空间隔开，而且某些明显的曲线仔细看起来像是成对的曲线。然而，实际上我们看到的是 1977 年一个早晨覆盖在麻省以东的冰封的萨得伯里河雪堆上的风纹理。

图 54 和图 55 完全能够按照短的指令或短的计算机程序重新建造，但是风纹理却不能依据任何已知的简单的数学公式来重新建造。为了重新从数值上建造雪堆上的风纹理，我们必须在每个纹理上指定许多点的位置，再通过插值法将每个纹理的其它点填满。如果我们要到一个岩礁上去看纹理，我们可能会想到要让这些指令确定其精确的经度和纬度好带着照相机去。但是雪堆上的纹理很快就消失了，当我妻子和我几天以后沿着河再次滑雪时，那些特殊的纹理已经无处可寻了。

分形性

有些量仅仅能够以整数形式度量，好比说一个家庭中孩子的数目(即使一个盼望生第三个孩子的母亲可能说她已有两个及肚子里的半个孩子)，棒球比赛中的得分数，一个单词中的字母数。多数人还会把物体或图形的维数也包括在内。一个三维的球能够有一个二维的影子，并带有一维的外形轮廓。然而，大约在 19 世纪末，数学家显然发现某些点集有分数的维数。当然，实际发生的是，一些开拓者研究了某些被大多数人认为是古怪的结构，他们发现这些古怪的结构缺少与简单的一维、二维或三维几何物体相关联的一般性质。因此他们以这种方式重新定义了维数：曲线、表面和立方体保留一维、二维和三维，而古怪结构具有精细的维数值。在许多情况下这些值原来是分数，以后又引入了似乎合于逻辑的其它定义，这些不同的定义并不经常一致。

一个常常引用的定义是1919年由德国数学家F. Hausdorff(豪斯多夫)引入的。有一个修改的定义我发现比较容易理解,这个定义对于许多点集等于Hausdorff维数,而对于其它点集则大于Hausdorff维数,这个定义就是由苏联数学家A. Kolmogorov(科尔莫戈罗夫)引入的**容量维**。我将用它作为分数维的定义。当点集处在平面上并限制在边长为1米的方形内时,那么阐述这个点集的容量维是最容易的。

我们将方形分成4个小方形,小方形每边为1/2米。然后又将每个小方形分成边长为1/4米的4个小方形等等。在每一步,我们记下覆盖该点集所有点所需要的新的方块的数目。我们的兴趣是从第一步到下面许多步,这些覆盖的小方块数目是如何增加的。

如果需要估计其维数的点集是方形的整个内部或一个或多个填满的区域,那么所覆盖的小方块的数目每一步都是前一步的4倍,即以因子2^2增加。如果这个点集是一曲线或有限长度的有限数目曲线,那么覆盖它的小方块数目则以2倍增加,因为大多数新的小方块将处在曲线之间,即通过因子2^1增加。最后,如果这个点集是一个点或有限点集,那么覆盖的小方块数最终会停止增长,即以因子2^0增加。在上述每种情况下,因子2(这里2是每一步小方块边长缩减的比例)的指数就是这个集合的维数。

我们现在要问,是否有这样的集合,覆盖它的小方块数目最终以2^d因子增长,而d不是一个整数。如果有,这集合的维数就是d,它是分数。

建立那种集合并不困难。例如,从一个单一的方块开始,然后连续分每个小方块成4个小方块。并且每一次都把小方块的右上角的那一半去掉。第一步产生一个胖"L"形,第二步产生一个楼梯,带有四步阶梯和一个三角形洞,最终的结果见图57,它是一个组成嵌套的等腰直角三角形的线段集合。为了用方形覆盖这些线段,我们在每一步要用3倍的方块数。由此得出,如果d是维数,由$2^d=3$,所以$d=1.586$。

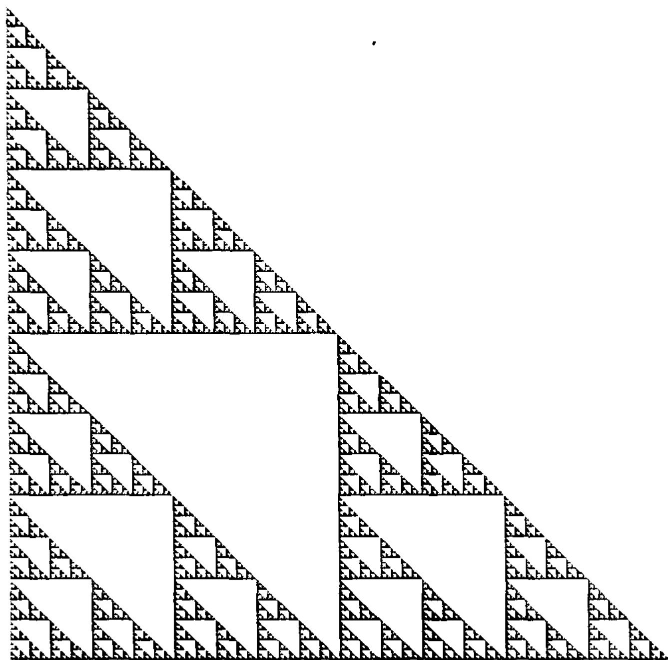


图 57　一个分数维三角形，它是由一个方形分成四个小方形并去掉右上角而产生的，然后将剩下的每一块再分成更小的块并去掉各自的右上角，无限地重复这一过程

如果说将近一个世纪前的数学家就在处理分数维的话，对于 B. Mandelbrot（曼德尔波罗特）在 20 世纪中叶识别带有分数维的集合就不会感到奇怪了。而且在自然界或日常生活中有许多这样的系统，至少这些系统的简单的数学模型具有分数维。这样的系统包括带有树干、树叶、树枝和小枝的树，以及带有凹凸不平的山。事实上，在他早期最著名的一篇题为“英国的海岸线有多长？”的论文中，Mandelbrot 就指出了如果我们测量的是连续放大的地图上的海岸长度，那么就能愈来愈分辨出小的弯曲，海岸线的长度就愈来愈长。这就相当于用愈来愈小的方块去覆盖海岸线，可以推断海岸线的维数在 1.0 和 2.0 之间，Mandelbrot 假设是 1.25。

Mandelbrot 创造了新的术语分形(fractal)来描述带有分数维的系统。英国海岸线和图 57 的三角形的结构是分形的。和其它许多创新的词不同,这个词立刻被广泛地使用,而且不像“混沌”和“复杂性”,它似乎有一个基本的含义。

Mandelbrot 在他的文章中反复讨论的许多分形分析的一个性质是自相似性:在许多分形系统中,几个适当选择的片段,经适当的放大以后,每一个都和整个系统相同。当然,这就意味着每个片段的几个子片段,经过放大以后就等价与原片段,因而也等价于整个系统。在图 57 中的每一个小三角形在结构上都清楚地等同于大三角形。其它分形仅仅是统计上的自相似。一小片段放大以后将和整个系统不重合,但是它们将有同一类型的样子。这种统计上自相似的类型出现在图 58 中,它是按图 57 的方法构造的,只不过不是去掉右上角,而是去掉了每一方块随机选择的一个角。

通过用自相似的概念,你可以构造你自己的分形树。如果你有一台绘图仪或认为绘草图就够了,那么就根本不用计算机。从一个垂直线段开始,这是树干。从树干顶端绘制一线段水平延伸到两边,每边长为树干的 6/10,这是两臂,从每一臂的末端,向上和向下绘制一条垂直线段,向上或向下的每一段长是臂长的 6/10。按这种方法继续绘下去,水平和垂直线段交替进行,直到线的宽度接近铅笔头的宽度为止。我们就得到图 59 那种形状的树。如果你能够完成这个过程到无穷多步,那么这树的分形维数是 1.356。也就是说,树枝最终收敛的点——树叶,也形成一个维数为 1.356 的分形。

臂长和树干长度之比不一定需要 6/10。如果你将这个比例减为 1/2 以下,那么树叶将是维数小于 1.0 的分形,即使这个树看起来还是非常像图 59 的树。如果你增加这个比例到 0.707,即 $\sqrt{1/2}$,那么上述维数将达到 2.0,并且这树或仅仅是树叶都能充满这一矩形。绘在平面上的图不可能有维数大于 2.0 的情况,如果你将这个比例增加到大于 0.707,那么较多短的树枝将无穷多次

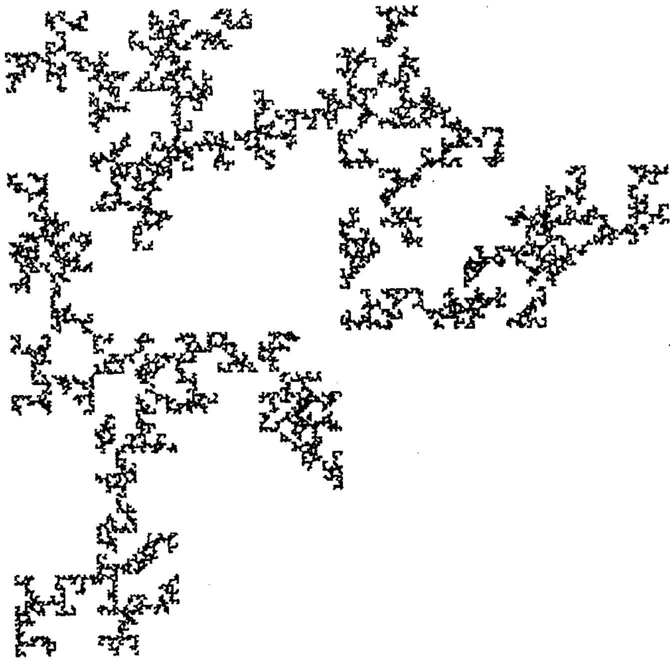


图 58　像图 57 那样形成的分形，不同的是在每个剩下的方形内去除的角是随机选择的

地简单地落在较长树枝的顶部。

如果这个比例正好是 1/2，那么会有什么结果呢？结果是树枝维数刚好为 1.0，但是这树看起来仍然像图 59。在分形家族中似乎理应包含这种集合，即使它们的维数刚好是整数。

你可能会反对，这个图看起来更像一个超负荷的电线杆，而不大像树。也可以有另外的选择方案。在每次分支时，两个较小的分支可以以不同的角度离开母体分支，而不必要以直角离开，而且两个分支长度对母体长度之比可以有不同的比值。也可以有三个或更多的臂在不同的高度上离开树干。你包含的变化愈多，你获得类似于树一类事物的机会就愈多。

图 60 和图 61 是两个例子。它们是用产生图 59 的同样的计算

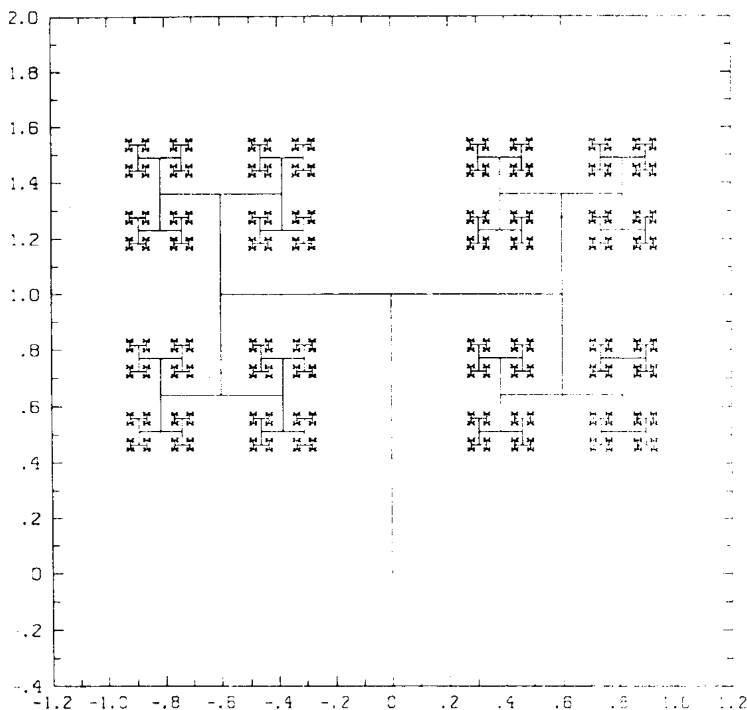


图 59 分形树。首先取一垂直线段，然后将这线段或任何其它已绘制的线段作为"母体"线段，并绘制出两个"后代"线段，每个后代段的长度是母体段长度的 6/10，并从母体末端以直角伸展

机程序产生的。仅有的差别是对上述两个角度和两个比例的选择。将引臂与树干进行比较，你就能看到这些究竟是什么。有兴趣的结构不总是树叶状的，但也可以仅仅通过绘出树叶而得到，如图 62 和图 63。这些图似乎支持 Mandelbrot 的主张，即：分形或至少是在有限分辨率下能够看得见的分形在自然界中是很多的。

分形一定伴随着混沌吗？当分形是从方形中通过去除右上角而产生的三角形时，就与混沌无关。从图 57 中一点也看不出随机性。最多可以说，它是通过一个简单程序而产生的一个图，它对于

仅仅看过 20 世纪中叶几何书上的图的那些人来讲，会感到有点奇怪。

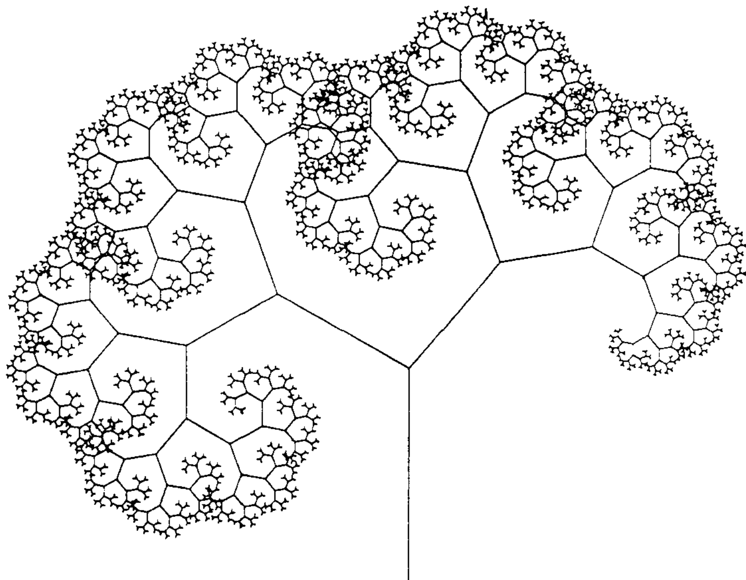


图 60　像图 59 一样绘制的分形树，只不过对两臂的比例都不是 0.6，而是 0.7 和 0.65，角度也不是 −90°和 +90°，而是 −60°和 +40°

图 57 的三角形甚至可以叫做逆转中的混沌。这是因为构造它也可以用另一个方法，这个方法是我在佐治亚理工学院听 M. Barnsley(巴恩斯利)演讲时首先知道的。放置一个三角形，并在一个边上的任何地方绘一个点。随机选择一个角，并绘出第一个点和这个角的连线的中点。再随机选一个角，并绘出新的点和这个角连线的中点。足够多次重复以后，你将产生图 57 的三角形。值得注意的是，如果你以规则的次序而不是随机的方式去选择角，那么仅仅有几个点这个过程就结束了。因此，在实际意义上，这个三角形乃属于是随机但看起来却又不像随机的一类事物。

在我谈论这种三角形时，我要提出产生它的另一种方法。取一

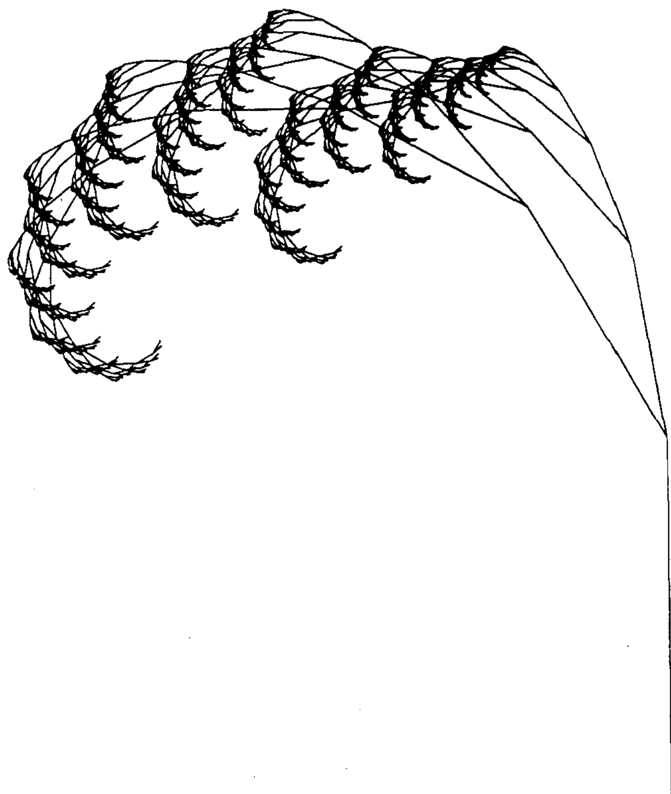


图 61 另一种分形树，比例为 0.75 和 0.55，角度是 $-30°$ 和 $-10°$

大张纸划线分成许多小方块。放一个记号“×”或其它别的记号在顶排的一个小方块中。在第二排和接着的各排中，如果一个方块的正上方方块或上左方块中，有标记“×”，那么就在该方块中放一个标记“×”。如果上方及上左方的小方块中同时有标记“×”，就不在该方块中放标记。在连续做了许多排以后，离开一点距离去看这张纸，标记好像融合在一起了，你将看到这种三角形。

从上一排演化到下一排的过程实际上是一个动力系统（一个映射），和我们所看到的任何其它过程很不同。该动力系统有无穷

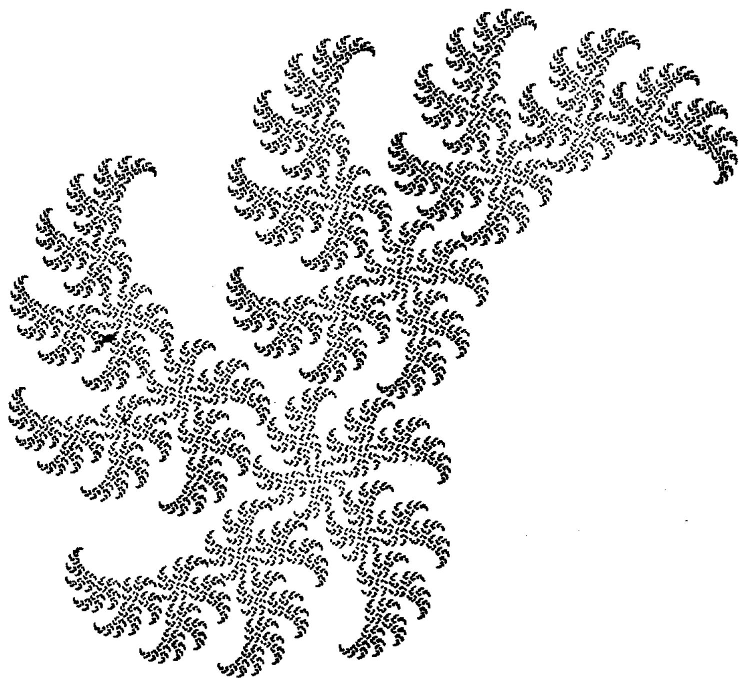


图 62　分形树的叶子。比例是 0.7 和 0.65，角度是 $-80°$ 和 $+20°$

多个变量，由形成一个排的方块表示，但是任何变量只能取有限个值（在本例中只能取两个值，一个有符号"×"的方块和一个空白方块）。从上排到下排的发展过程代表时间的演化。这样的系统叫细胞自动机，并且它们是以 J. von Neumann（冯·诺伊曼）的丰富想像的另一个成果首先进入数学领域的。对多维自动机的日益增长的兴趣部分是由于它明显提供了模拟流体运动的特别经济的手段。

一些分形通过不复杂规则产生之后非常接近混沌，但看起来却高度错综复杂，而不仅仅是奇特的结构。但是在分形和混沌之间有非常紧密的联系，奇怪吸引子就是分形。

对于像图 12 和图 16 形状的吸引子来说，由于它们的几乎是

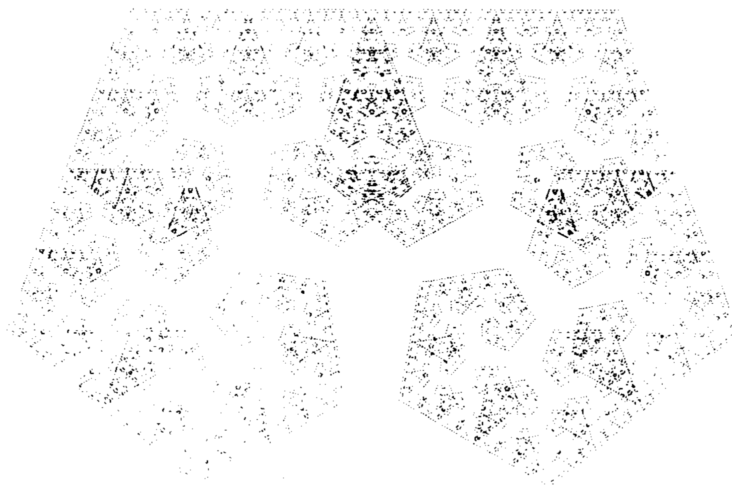


图 63 另一种树叶集合，两臂比例都是 0.71，角度是 $-70°$ 和 $+70°$

平行曲线的复杂性，因此覆盖每一点所需要的小方块的数目在方块边长减半时，应增加 2 倍以上，这是因为每个方块仅穿过较少的曲线。然而数目也不是 4 倍，因为愈来愈多的方块要落在曲线之间，因此图 12 和图 16 吸引子的维数在 1.0 和 2.0 之间。

图 64 是这样构造的，即：在图中所画的每一条垂线要与该曲线相交成一个 Cantor（康托尔）集，其维数处在 0 和 1 之间，其数值由底部的坐标读出。它因此可以作为一个标尺用来估计像图 12 和图 16 那样某些结构的维数的分数部分。图 12 和图 16 中的那些结构与直线的交点是 Cantor 集。我们可以看到这个集合或是稀疏的（如图 64 的左边所示），或是稠密的（如 64 的右边所示）。对于维数为 0.1 或稍大一点的情况，与垂线仅仅有两个交点可以在绘图中分辨出来；与蝴蝶吸引子相交的一条直线也是如此，这个蝴蝶吸引子看起来好像仅由两个正在合拢的表面组成。切割图 12 和图 16 的线看起来比较像图 64 横坐标的中心部分，所以这些吸引子的维数估计接近 1.5；请参看附录 2 中有关 Lyapunov 指数和维数的讨

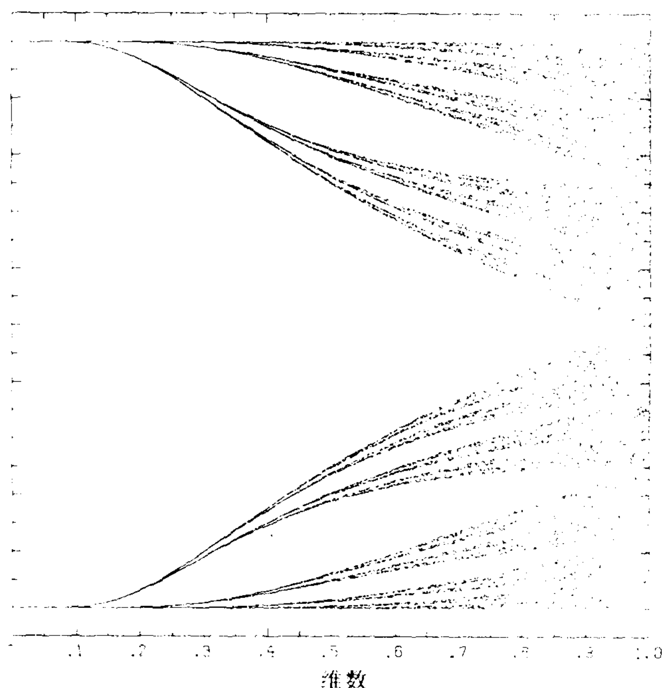


图 64　一个分数维标尺。穿过图绘制的任一垂线将与标尺相交形成 Cantor 集，它的维数在 0.0 和 1.0 之间，数值见底部坐标

论。

一个由连续曲线组成而不是由这些曲线上随机选择的点组成的相类似的图给出在 Mandelbrot 的内容广泛的书《自然界的分形几何》中。实际上正是这些曲线与垂线的交点构成 Cantor 集。图 64 中使用点线是为了便于与图 12 和 16 那样用点线表示的其它图进行比较。

直到 70 年代末，“混沌”才被确定为一个标准术语用来表示对初始状态具有敏感依赖性的现象。也大约正是在这个期间，人们迅速遇到一些新的奇怪吸引子。这些吸引子有分数维的结构，而不是缺少周期性或具有对初始状态的敏感依赖性，这是一些专家发现的最引人注目的特征。至少在目前分数维正在成为混沌理论的主

要研究对象。但是,对于混沌而言,扩展它的领域到所有类型的分形分析,乃至扩展到在计算机到来前尚不熟悉的研究对象的更加普遍的形状,只不过是一个短暂的过程。在回顾本书的时候,我们将很难保持“混沌”的原义不扩展到比其它更适合的这些形状的范畴。

毫无疑问,“混沌”这个术语与“奇怪吸引子”一样,是一个富有魅力的术语,这类术语往往能使人顾名思义。我常常思考在书店中 J. Gleick 的畅销书* 的书名,如果改成:《敏感的依赖性:创立一门新科学》,这将又如何呢?

---

* 即第一章提到的 J. Gleick 所著《混沌:开创一门新科学》——编者注

附录 1　蝴蝶效应

下面是我的一次演讲的讲稿，那是在 1972 年 12 月 29 日，在美国首都华盛顿召开的美国科学发展协会的第 139 次会议上关于"致力于全球大气研究计划"的一个专题中由我提出并作为新闻公报准备的。这个讲稿从未公开发表过，现在在这里将原稿拿出来作为本书的一个附录。

可预报性：在巴西一只蝴蝶翅膀的拍打能够在美国得克萨斯州产生一个陆龙卷吗？

我很担心，即使提出这个问题作为标题都显得很无聊，更不用说这个问题有肯定的回答了，为此，请允许我提出两个命题并以特有的看法给以阐述。

1. 如果一只蝴蝶翅膀的一次拍打能有助于产生一个陆龙卷的话，那么该蝴蝶翅膀所有早先的和后继的拍打，乃至别的千千万万蝴蝶的翅膀的拍打也都有助于产生陆龙卷，更不用说无数个更强大的动物（包括我们人类自身在内）的活动了。

2. 如果一只蝴蝶的翅膀的拍打能有助于产生一个陆龙卷的话，那么，它同样也能够有利于抑制一个陆龙卷。

更一般地说，我认为在长年间微小的扰动既不会增加也不会减少像陆龙卷那样的各种天气事件发生的次数，它们充其量可能只是使这些事件的进程略有改变。不过我们真正感兴趣的问题是：即使仅仅是修改事件的进程，微小的扰动能做到吗？例如，差别仅仅是受单个蝴蝶直接影响的两个特殊的天气形势，在足够长的时间以后会不会发展成为其差别与陆龙卷一样大的两种不同的天气形势呢？用更专门一些的话来说，大气的行为对于小振幅的扰动是不稳定的吗？

这个问题明显地跟我们预报天气的能力有关。既然我们不可能确切地知道有多少蝴蝶，也不可能知道它们在哪儿，更不可能知道哪些蝴蝶随时拍打它们的翅膀，所以，即使对我们的问题的回答是肯定的，我们也不可能对足够长的未来准确地预测陆龙卷的产生。更为重要的是，即便像雷暴一样大的天气系统从气象站之间经过时，我们都发觉不了，这就会削弱我们哪怕是对近期一般天气流型进行预测的能力。

那么，我们到底怎样才能确定大气是否不稳定的呢？首先，大气不是一个可控制的实验室，如果我们扰动它，然后观测什么事能

够发生的话，那么，我们永远也不可能知道如果我们不去扰动它时将要发生什么。任何认为借助于天气预报，我们就可以知道将要发生什么事的论调都意味着：我们寻求回答的这个问题已经有了否定的答案。

其次，我们的结论多半是根据计算机对大气的模拟得到的，有待求解的方程组只是代表了我们已尽最大努力去用与当前计算机能力相匹配的方程组代替实际支配大气的方程组。通常，将两个数值解进行比较。一个数值解用来模拟实际的天气，而另一个数值解则是模拟当初始条件稍有不同时的天气演化情况，也就是利用一个完全的预报方法但是不完全的观测资料所预报的天气。因此，两个解之间的差别便模拟了在预报中的误差。随着更先进的计算机的出现以及我们对大气动力状况的认识的不断改进，新的模拟正在不断地实现。

虽然我们不能宣称已经证明了大气是不稳定的，但却有大量的证据表明大气确是不稳定的。最重要的结果如下：

1. 在天气型式中的较大特征结构（它指的是那些通过常规观测网能分辨出来的特征）中的小误差往往经过 3 天左右就加倍。当误差增大后，增长速率就会降低。光是这个限制就能够允许我们只要每次将观测误差减少一半就可以把可接受的预报延长 3 天，并有希望最终做出几个星期的较好的预报。

2. 天气型式中的较小特征结构，例如单个云的位置的小的误差，往往会更加迅速地增长，在几个小时或者更短的时间内就会加倍。因为一般我们完全不预报较小的特征结构，因此，这个限制不会严重地减少我们制作延伸预报的希望。

3. 在这些小的特征结构中的误差，如果已经达到可观大小的话，往往会诱导较大特征结构的误差。这个还不能完全肯定的结果意味着，大约 1 天以后，在较大的特征结构中将出现明显的误差，随后这些误差的增长与它们在初始阶段的增长相似。这样，如果使小的特征结构的观测误差减半（这是一项十分艰巨的工作）的话，也只能把较大特征结构的可接受预报时限至多延长几小时。因而

制作两周以上预报的希望大大减小了。

4. 某些特殊的物理量，如周平均温度和周总降雨量的预报时限要比整个的天气型式的预报时限长得多。

不管理论研究的结果如何，如果确有充分的证据表明某一特殊的预报方案一般能作出较好的两周以上的预报的话，那么似乎可以得出结论说两周以上的逐日预报是能够制作的。但是，就我们所知，从来没有这样的证据提出过。当然，即便是纯粹的猜测也会有某一百分比的正确率。

现在让我们回到最初我们提出的问题，我们还要考虑别的观点。第一个观点是单个蝴蝶的影响并不仅仅是一个微不足道的力量——它是被局限于一个小的范围内的。能很好地适于检查误差增大的一些数值方法看来并不适于研究从有限区域到无限区域误差的传播。未经证实的一个假说是：蝴蝶翅膀的影响将在湍动的空气中扩展，而不是在静稳的空气中扩展。

第二个观点是：巴西和得克萨斯位于不同的半球上，热带大气的动力特征明显地不同于温带大气和极地大气，热带大气几乎就好像是另一种流体一样。在任一半球的温带范围内误差能够扩展数千英里，但不能穿过赤道，看来这一点是完全可能的。

所以，我们必须保留我们最初提出的问题在相当多年不予回答，即使在我们关于大气是不稳定的观点得到确认的时候。同时，目前天气预报中的一些误差不能完全归罪于天气型式中的小的特征结构，即使是主要归罪于它们也不行。这些预报误差主要起因于我们即使对那些较大的特征结构也不能进行较完全的观测，我们对控制大气运动的物理规律了解不够充分以及我们在将这些物理定律表达成人脑或计算机能够进行操作的公式时必需引入一些不可避免的近似。这些不足是不可能完全消除的，但是它们能够通过一个扩大的观测系统和集中的研究而大大地减小。全球大气研究计划的最终目的并不是致力于制作出完全准确的预报，而是要制作出大气愿意让我们做出的最好的预报。

附录 2　数学漫游

数值积分

本书的大部分图都是通过一个计算机绘图程序描绘出来的，这个程序简单地画出点集并且有时用直线段连接相邻的点。经常出现的平滑曲线是将非常靠近的点连接而成的，在某些情况下，画的点非常接近，它们之间毋需连接。

除了像滑雪坡道斜视图这样的示意图之外,被描绘的点都是由适当方程组确定的。

对于映射来说,差分方程可以直接通过现在的状态表示未来的状态,因此获得各点的长年序列是不成问题的。对于流来说,首先必需求解微分方程。特解为混沌解的方程一般找不到通解,通常只能用数值方法确定近似特解。

数值积分有许多方法,其中经典的四阶 Runge-Kutta(龙格-库塔)法是特别流行的,如应用适当,可以得到很好的结果。Runge-Kutta 法是 19 世纪末首先设计的许多方法之一,它是由德国数学家 C. Runge(龙格)首先创立的,并且在几年以后由另一位德国数学家 W. Kutta(库塔)把它变成了现在的形式。除了弹球游戏系统而外,在本书中作为例子的所有的微分方程都是用 Runge-Kutta 法积分的。

为了求解一个典型的方程组,如

$$dX/dt = F(X,Y),$$
$$dY/dt = G(X,Y),$$

我们首先选一个时间增量 Δt,然后在某个时刻 t,当 $X(t)$和 $Y(t)$已知时,去找 $X(t+\Delta t)$和 $Y(t+\Delta t)$。令

$$X_0 = X(t),$$
$$X_1 = X_0 + F(X_0,Y_0)\Delta t/2,$$
$$X_2 = X_0 + F(X_1,Y_1)\Delta t/2,$$
$$X_3 = X_0 + F(X_2,Y_2)\Delta t/2,$$
$$X_4 = X_0 + F(X_3,Y_3)\Delta t/2,$$

最后有

$$X(t + \Delta t) = (X_1 + 2X_2 + X_3 - X_4)/3。$$

对 Y 也有类似的表达式,注意,在求得 X_i 或 Y_i 以前,必须先求得 X_{i-1} 和 Y_{i-1}。程序可随意重复迭代许多次,$t + \Delta t$ 的老的值可以用来作为每次迭代中 t 的新值。

当 Δt 充分小时,Runge-Kutta 法能给出高度准确的结果,但

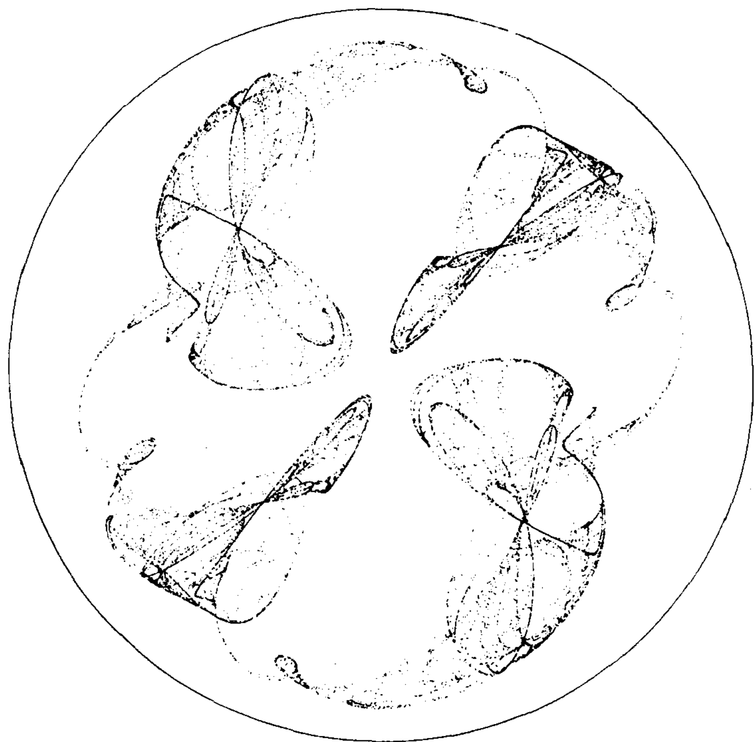


图 65 应用四阶 Runge-Kutta 法求解的两个微分方程构成的系统的圆吸引子的近似，外圆是由 $\Delta t = 0.5$ 算得的吸引子，内部的结构是由 $\Delta t = 1.65$ 算得的吸引子

是，如果 Δt 选择得太大，奇怪的事就能发生。例如，由微分方程组

$$dX/dt = X - Y - X^3,$$
$$dY/dt = X - X^2Y$$

定义的系统的吸引子是一个圆。取 $\Delta t = 0.5$，计算的吸引子所形成的如图 65 的周线很难与真正的圆相区别。但当取 $\Delta t = 1.65$ 时，圆让位给封闭的奇怪吸引子。顺便说一句，在图 53 中的奇怪吸引子是应用一个二阶 Runge-Kutta 方法得到相同的方程组所产生的。

在这个简单的方法中，X_0 和 X_1 的定义同前，并且

$$X(t+\Delta t)=X_0+F(X_1,Y_1)\Delta t。$$

你可以利用不同的 Δt 的值去做试验。

通常，我们希望在迭代值之间进行内插；例如，为了构造一个 Poincaré 截面，我们必须知道当 $X=0$ 时 Y 的值。对于 $0<c<1$，一个合适的公式是四次多项式近似

$$\begin{aligned}X(t+c\Delta t)=&X_0+2(X_1-X_0)c+2(X_2-X_1)c^2\\&+2(X_3-2X_2+X_0)c^3/3\\&-(X_4+X_3-X_1-X_0)c^4/3,\end{aligned}$$

而 Y 的表达式与前类似。如果我们已经知道通过 t 和 $t+\Delta t$ 之间 X 有一个零点，那么我们就可以令 $X(t+c\Delta t)$ 的表达式为零，从而求解得 c 的四次方程，然后去计算 $Y(t+c\Delta t)$。c 的四次代数方程可以很容易用牛顿方法求解；令

$$c_0=X(t)/(X(t)-X(t+\Delta t)),$$

然后，对 $n=0,1,\cdots$，令

$$c_{n+1}=c_n-X(T+c_n\Delta t)/D(c_n),$$

其中

$$\begin{aligned}D(c)=&2(X_1-X_0)+4(X_2-X_1)c+2(X_3-2X_2+X_0)c^2\\&-4(X_4+X_3-X_1-X_0)c^3/3\end{aligned}$$

是 $X(t+c\Delta t)$ 对 c 的微商。当 c_{n+1} 非常接近 c_n 时就停止运算，并且令 $c=c_{n+1}$。就某些用途来说，c_0 可能是 c 足够好的近似。

蝴　蝶

在第一章形成蝴蝶形图样的方程组以及我在论“确定性的非周期流”中用来作为混沌例子的那个方程组是：

$$\mathrm{d}x/\mathrm{d}t=-\sigma x+\sigma y,$$

$$\mathrm{d}y/\mathrm{d}t=-xz+rx-y,$$

$$dz/dt = xy - bz,$$

其中三个参数 b、σ 和 r 确定了系统的行为。对这样的方程组已作了充分的研究，剑桥大学的 C. Sparrow(斯帕罗)甚至还写了一本有关这个方程组的完整的书。

通常被称为吸引子的结构实际上是指在吸引子中所包含的特解的一个广延部分。为了获得像在第一章中所描写的蝴蝶，我们令 $b = 8/3$，$\sigma = 10$ 和 $r = 28$，选一个合适的时间步长和 x、y、z 的适当的初值，并且应用一个数值方法，如应用四阶 Runge-Kutta 法去求解方程组。在运算几千步以后停止运算，画出 z 随 x 的变化曲线，如果开头几个点不那么稳定的话，可以略去。

用线段依次把顺序的点连接起来使它看起来像一个很长的连续的曲线，就画出了蝴蝶。类似的效应也能通过选择一个很小的时间步长得到。我开始时取 $\Delta t = 0.002$，以为出现了新的一类蝴蝶，但后来发现小数点打错了地方。像这样变化 Δt 有时能产生比蝴蝶高等的生物，但比较多的情况还是产生一些无意义的信息，间或也会造成灾难性结果。

Rössler 方程组

$$dx/dt = - y - z,$$
$$dy/dt = x + \alpha y,$$
$$dz/dt = \alpha + xz - \mu z$$

只有一个非线性项，而不是像 Lornez 方程组有两个非线性项。Rössler 取 $\alpha = 0.2$ 和 $\mu = 5.7$ 就产生了混沌。

滑雪坡道

在滑雪坡道上表征一个滑板或一个雪橇的运动的方程组就是牛顿定律的简单公式，这些方程令运动的加速度等于单位质量的力。设 X、Y、Z 是距离，U、V 和 W 分别是向南、向东和向上运动的速度分量，又设 $H(X,Y)$ 为以某个水平面为基准的坡道的高度，

则方程组是：

$$dX/dt = U,$$
$$dY/dt = V,$$
$$dZ/dt = W,$$
$$dU/dt = - FH_X - cU,$$
$$dV/dt = - FH_Y - cV,$$
$$dW/dt = - g + F - cW,$$

其中 g 是重力加速度，F 是坡道对滑板或雪橇的阻力的垂直分量，c 是摩擦系数，下标表示偏微商。

因在坡道上

$$Z = H(X,Y),$$

由此有

$$W = H_XU + H_YV,$$

且

$$dW/dt = - H_X(FH_X + cU) - H_Y(FH_Y + cV) + (H_{XX}U^2 + 2H_{XY}UV + H_{YY}V^2)。$$

消去 W 和 dW/dt，得到

$$F = (g + H_{XX}U^2 + 2H_{XY}UV + 2H_{YY}V^2)/(1 + H_X^2 + H_Y^2),$$

根 据这个 F，关于 X、Y、U 和 V 的方程就能描写滑板或雪橇的运动。

对于滑板，c 是一个预先选择的常数，虽然，如前所述，它与坡道对滑板的阻力 $F \cdot \sqrt{1 + H_X^2 + H_Y^2}$ 成正比；对于雪橇，U 是一个预先选定的常数，并且 c 选择使得 $dU/dt = 0$，因而

$$c = - FH_X/U。$$

在正文的所有例子中，

$$H = - aX - b\cos(pX)\cos(qY),$$

所以，除了 g、c 或 U 以外，在计算开始以前 a、b、p 和 q 的值必须确定好。在我们的每个例子中 $2\pi/p = 10.0$ 米，，$2\pi/q = 4.0$ 米，除了在 Hamilton 系统中 $a = 0$ 外，$a = 0.25$。通常 $b = 0.5$ 米，特殊情况

下 $b = 0.25$ 米，在有关分岔的讨论中 b 在 0.0 米到 0.6 米之间变化。注意 h 是在附近洼地上面的一个雪丘的高度，其值为 $2b$。对于滑板 $c^{-1} = 2$ 秒，而对于雪橇 $U = 3.5$ 米 / 秒 。

对于雪橇和连续沿坡道下滑的滑板而言 X 可用来代替 t 作为独立变量。注意上述处理要排除保守系统和滑板陷入洼地的情况。关于 Y 和 V 对时间微商的表达式和在滑板情况下 U 对时间微商的表达式我们都要除以 U。这样，描写雪橇运动的是两个方程构成的系统，而描写滑板运动则是三个方程构成的系统。因为在这些方程中总要出现 $\cos(pX)$ 和 $\sin(pX)$，因而无论是雪橇还是滑板都存在与独立变量的周期依赖关系。

体积守恒的混沌

当应用 Runge-Kutta 法或其它一些方法来求解一个微分方程组时，除了方程组本身所要求的能量增加或减少以外，它通常会产生一个小的但是持续的能量输入或输出。如果系统是耗散的，这个作用只能稍稍改变预先给定的耗散率，而这个耗散率多少是有点任意选择的。但如果系统是非耗散的，那么这个作用将使它变为一个耗散系统，且带有非常不一样的长期特性。因此，在求解这样的方程组时，选择一个非常小的时间步长以减少任何虚假的行为是特别重要的。当然，这样做不可避免地要增加计算时间。

如果你有兴趣比较详细地研究包含周期的孤立岛的用点线标出的混沌海的话，你就必须考虑应用一个不需要用专门积分方法的差分方程的系统。在这些系统中最流行的一个系统是由 B. Chirikov（奇里科夫）作为 Hamilton 系统的范例所提出来的所谓标准映射，它在极坐标中写为

$$r_{n+1} = r_n + a\sin\theta_n,$$

$$\theta_{n+1} = \theta_n + r_{n+1}。$$

但是，我所知道的最简单的系统是三阶差分方程

$$x_{n+1} = x_n x_{n-1} - x_{n-2},$$

其中，当三个依次的数给定后，通过一个乘法和一个减法就能产生下一个数。在系统中，量

$$Q = x_n^2 + x_{n-1}^2 + x_{n-2}^2 - x_n x_{n-1} x_{n-2}$$

是守恒的。因此，尽管它没有用显式表示的参数，但它实际上定义了一族动力系统，对于每个 Q 值都有一个系统。当 Q 接近于零时，Q 的等值面很像一个球，当 Q 值较大时，球明显地变形；当 $Q > 4$ 时，球张开并延伸至无穷远。

为了观测系统的结构，我们选定一个 Q 值；一个在 1.0 到 2.0 之间的中等大小的 Q 值就可以了。其次要选定 x_1 和 x_2，它们不要选得太大，并且在 Q 的公式中取 $n = 3$，这样就得到了关于 x_3 的一个二次代数方程，求解它有两个根，其中任一个都可作为 x_3，另一个作为 x_0。点 (x_{n-1}, x_n) 将位于 Q 面在一个平面的投影上，为了避免最近的边和最远的边彼此叠置，你可以只画出 $x_{n+1} > x_{n-2}$ 时 x_n 随 x_{n-1} 变化的曲线。这样，你就能够像利用体积守恒的坡道模式一样快地屡次地得到新的点集。利用高的分辨率你还能揭示环形链和围绕这些链的更小的环形链，也许还会有什么想不到的事发生。

Hill 的简化问题

在 Hill 的三体问题的简化形式中，所有的三个物体都在同一个平面中运动。三体之一，即“卫星”，有一个微不足道的质量，另外两个“行星”围绕总的质心以圆形轨道运行。

设 m_1 和 m_2 是两个行星的质量，(x_1, y_1) 和 (x_2, y_2) 是它们在笛卡儿坐标中位置。如果 $x_{12} = x_2 - x_1, y_{12} = y_2 - y_1, r_{12}{}^2 = x_{12}^2 + y_{12}^2$，则控制两个行星运动的方程组是

$$m_1 \mathrm{d}^2 x_1 / \mathrm{d}t^2 = c m_1 m_2 x_{12} / r_{12}^2,$$

$$m_2 \mathrm{d}^2 x_2 / \mathrm{d}t^2 = - c m_1 m_2 x_{12} / r_{12}^2,$$

对 y_1 和 y_2 有类似的方程。因为行星在圆形轨道上运行，r_{12} 是一个常数，并且，质量、距离和时间的单位可以选择使得 $m_1 + m_2 = 1$，$r_{12} = 1$ 和 $c = 1$，这样就有

$$d^2x_{12}/dt^2 = -x_{12}, \quad d^2y_{12}/dt^2 = -y_{12},$$

设初始时刻选择使得 $y_{12} = 0$ 和 $x_{12} > 0$，则

$$x_{12} = \cos t,\ y_{12} = \sin t$$

因而得到

$$x_1 = -m_2\cos t, \quad y_1 = -m_2\sin t,$$
$$x_2 = m_1\cos t, \quad y_2 = m_1\sin t。$$

设 (x,y) 是卫星的位置，$r_1^2 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2$，$r_2^2 = (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2$，则控制卫星运动的方程组是

$$d^2x/dt^2 = -m_1(x - x_1)/r_1^3 - m_2(x - x_2)/r_2^3,$$

y 有类似的方程。引入新坐标

$$X = x\cos t + y\sin t,$$
$$Y = -x\sin t + y\cos t,$$

这就意味着在一个与行星一起旋转的坐标系中去观测卫星的运动。取 X 轴永远通过行星，则控制卫星运动的方程组可以写为

$$dX/dt = U,$$
$$dY/dt = V,$$
$$dU/dt = X + 2V - m_1X/r_1^3 - m_2X/r_2^3 - m_1m_2/r_1^3 + m_1m_2/r_2^3,$$
$$dV/dt = Y - 2U - m_1Y/r_1^3 - m_2Y/r_2^3,$$

其中 $r_1^2 = (X + m_2)^2 + Y^2$，$r_2^2 = (X - m_1)^2 + Y^2$，这样，虽然这些方程没有因坐标系的旋转而变短，但时间 t 已不再以显式出现在方程组的右端。

方程组的守恒量是所谓的 Jacobi 积分

$$J = (U^2 + V^2 - m_1/r_1 - m_2/r_2)/2,$$

所以，事实上我们有一族三个变量的动力系统，对于每个 J 值都有一个系统，而不是一个单一的四个变量的系统。在这个方面，这个

系统很像守恒的滑雪坡道模式。

当 r_1 或 r_2 变得很小时，为了保持 J 守恒，U 或 V 必须变得很大，这样，当卫星移动到非常接近一个行星时，在大部分时间能正常运行的 Runge-Kutta 法的计算程序可能突然失效。为了避免出现这种情况，我们可以让时间步长逐渐地改变，如当 r_1 或 r_2 很小时，我们使步长取得非常小。

如果 J 的初值取为负的，它可以保证卫星不能逃逸到无穷远。对于 m_1、m_2 和 J 的某些值，卫星可以在一个行星或另一个行星附近被捕获；但利用 m_1、m_2 和 J 的另外一些值，包括利用图 29 和图 30 所取的那些值，卫星就能够在两个行星之间往复地运行。

在 $Y=0$ 和 $V>0$ 时的一个 Poincaré 截面将产生一个二维映射。利用 m_1、m_2 和 J 的固定值和各种初始条件，你理应能够得到一个类似于图 20 的图，在混沌海中有孤立的岛。

Logistic 方程

Logistic 方程最通常地写为

$$X_{n+1} = AX_n(1 - X_n);$$

这里采用的符号可以改变。在 $0 < A \leqslant 4$ 时，Logistic 方程定义一类把 0 到 1 区间映射到它自身的不可逆映射。Logistic 方程或许是研究周期倍分岔的一个最简单的可行的方程。当 $A=3$ 时，主序列在周期 1 到周期 2 之间开始分岔；当 $A=1+\sqrt{6}=3.45$ 时，主序列在周期 2 到周期 4 之间开始分岔。在 R. Devaney（德韦尼）所著的教科书《混沌动力系统引论》中，Logistic 方程已被作为主要说明问题的例子。

使 Logistic 方程具有周期行为的 A 值构成了无限个有限区间，而使 Logistic 方程具有混沌行为的 A 值则在 3.57 到 4.0 之间，形成一个维数似乎是 1.0 的 Cantor 集。Cantor 集是取一个单位长度的区间，先移去中间的 1/4，然后把剩下的两段中再移去中

间的 1/9，再后在剩余的 4 段中再移去中间的 1/16，如此不断所形成的，这里被移去的长度之和仅为 1/2。

若令 $c = A/2 - A^2/4, z = A(1 - 2X)/2$，则 Logistic 方程变为

$$z_{n+1} = z_n^2 + c,$$

这是 Logistic 方程的另一个常用的形式。在 $c = -3/4$ 和 $c = -5/4$ 时出现头两个周期倍分岔。出现从周期 2^{i-1} 到周期 2^i 分岔的 c_i 值收敛于 $c_\infty = -1.4012$，而比值 $(c_\infty - c_{i-1})/(c_\infty - c_i)$ 收敛于 4.6692。4.6692 是由 M. Feigenbaum（费恩鲍姆）发现用来表征一大类映射和流中所发生的分岔的一个数。周期 3 的解首先出现在当 $c = -7/4$ 时的一个鞍点-结点分岔处。注意，Logistic 方程等价于二阶守恒系统

$$z_{n+1} = z_n + z_n^2 - w_n^2,$$

$$w_{n+1} = z_n,$$

其中不含有常数，但 $z - w^2$ 保持它的初值不变。

当 c 和 z 取为复数时，一阶方程成为

$$x_{n+1} = x_n^2 + y_n^2 + a,$$

$$y_{n+1} = 2x_n y_n + b,$$

其中 $c = a + ib, z = x + iy$。上述方程组可以产生 Mandelbrot 集。如果开始于(0,0)的序列 (x_n, y_n) 不趋近于无限，则点 (a,b) 在 Mandelbrot 集内。常见的 Mandelbrot 集的彩色图实际上画的是 Mandelbrot 集外边的区域。x 或 y 变为很大（例如 $x^2 + y^2 = 10^6$）所需要的不同步数用不同的颜色表示。x 和 y 的任何别的大的数也可以应用，只要能装入计算机就行，因为当 x 和 y 变为很大时，步数将迅速地增加。颜色的选择需要一个艺术家的眼睛而不是数学家的眼睛。

Lyapunov 指数和维数

考虑一个 n 个变量的动力系统。选一个点，并取一个中心在该点的一个小的 n 维的球，随着时间的增加，球将变形成为一个近似的椭球；比较图 15，其中 $n = 2$ 。在球的初始直径趋向于零的极限情况下，映像保持与椭球相同的时间将趋向于无穷大。

在一次迭代中（对于映射来说）或一个时间单位中（对于流来说）椭球的轴长增加的倍数的长期平均值称为 Lyapunov 数，其对数称为 Lyapunov 指数。也就是说，如果最后椭球的一个轴按 $e^{\lambda t}$ 迅速地增加或减少，那么，相应的 Lyapunov 指数就是 λ。通常 Lyapunov 指数从大到小排列，即 $\lambda_1 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n$ 。

如果要 Lyapunov 指数具有该系统的特征，那么应该避开对原点的某些选择。这些点包括不稳定的不动点和在不稳定周期解上的点。如果有几个吸引子，那么分离的吸引域就可以有分离的 Lyapunov 指数集。对于 Hamilton 系统，其混沌海和周期解有不同的 Lyapunov 指数。

Lyapunov 指数的和表征了椭球体积的增长率或减小率，对 Hamilton 系统，Lyapunov 指数的和为零；对耗散系统，Lyapunov 指数的和为负。如果耗散系统的吸引子是一个不动点，那么所有的 Lyapunov 指数通常是负的。如果是一个简单的 m 维流形（$m = 1$ 或 $m = 2$ 分别为一个曲线或一个面），那么，前 m 个 Lyapunov 指数是零，其余的 Lyapunov 指数为负。不管系统是不是耗散的，只要 $\lambda_1 > 0$ 就会出现混沌。

考虑一个包含吸引子的 n 维盒子。前 k 个 Lyapunov 指数的和 $\lambda_1 + \cdots + \lambda_k$ 表征了体积的增长率或减小率（$k = 1$ 或 $k = 2$ 分别表征长度或面积的增长率或减小率），这里的体积是指一个无穷小的椭球在盒子的 k 维表面上的投影。因此，如果 $\lambda_1 > 0$，则一个有限小的椭球在盒子的一个边缘上的投影将不断增长，直到这一已经严

重变形的椭球上的几个点投影到同一点时，也即直到投影自身重叠时为止。此外，如果还有 $\lambda_1 + \lambda_2 < 0$，那么在一个两维面上的投影将缩小，这时，吸引子可以视为是由曲线的一个子集组成的，而没有面出现。

不管是否有 $\lambda_2 > 0$，只要 $\lambda_1 + \lambda_2 > 0$ 和 $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 < 0$，则在一个二维面上的投影的面积将连续地增长一直到折叠发生为止。而在一个三维面上投影的体积将连续地缩小，并且吸引子可以视为是由曲面的一个子集组成的。更一般地说，如果 $\lambda_1 + \cdots + \lambda_k > 0$，但 $\lambda_1 + \cdots + \lambda_{k+1} < 0$，那么吸引子应由 k 维流形的一个子集组成。

利用相关的 Lyapunov 指数，J. Kaplan（卡普兰）和 J. Yorke（约克）给出了一个吸引子的分数维公式。设 $\lambda_1 + \cdots + \lambda_k \geqslant 0$ 和 $\lambda_1 + \cdots + \lambda_{k+1} < 0$，这意味着 $\lambda_{k+1} < 0$，则分数维公式是

$$d = k + (\lambda_1 + \cdots + \lambda_k)/|\lambda_{k+1}|$$

对一些简单的系统，可以证明 d 与容量维数相等，对比较复杂的系统，它没有严格的公式，但上述公式中的 d 可看作是维数的一个可供选择的定义。

对于雪橇模式的 Poincaré 映射，取时间单位为下降 5 米所需要的时间，则 $\lambda_1 = 0.72$，椭球的最长轴在刚好下降 5 米以后加倍，且 $\lambda_2 = -1.53$ 使得 $d = 1.47$。对于充分的流，Lyapunov 指数是 0.72、0 和—1.53。一个 Lyapunov 指数为零乃是吸引子不是一个不动点的流的普遍情况。

如果所有小圆的行为与图 15 中最初的一个圆一样，Lyapunov 数应是 4.8 和 0.047，所以，Lyapunov 指数应为 1.57 和 -3.06，因而，选择的圆将变形，且变形速度是典型圆变形速度的两倍，但它仍可以合理地估计维数是 1.51。

对于滑板模式的 Poincaré 映射，$\lambda_1 = 0.67$，因此轴长约在 1 个时间单位内再次加倍，而对 $\lambda_2 = -0.70$ 和 $\lambda_3 = -1.36$，使得 $d = 1.96$。这个值的大小已足以使吸引子由曲面而不是由曲线所

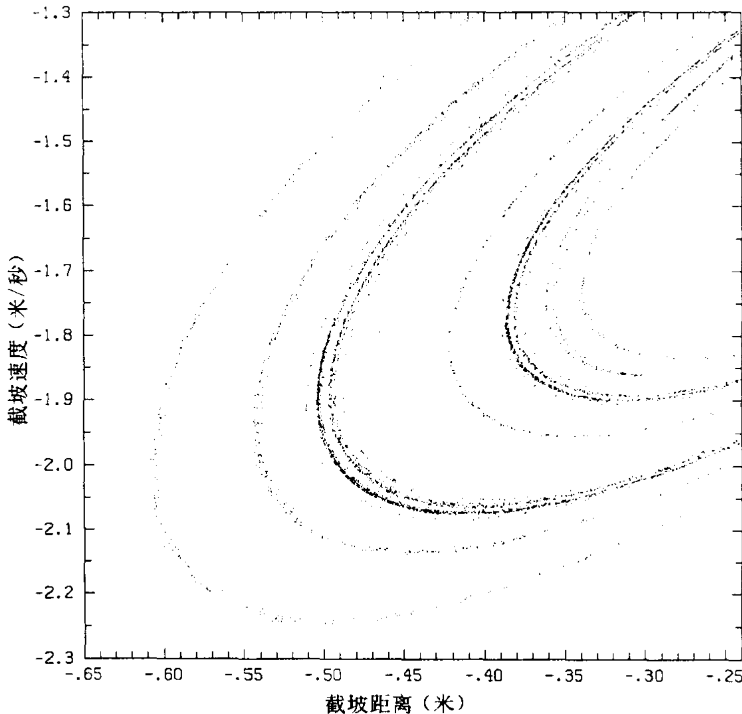


图 66 图 12 中所示雪橇模式吸引子截面放大 10 倍后的情形

组成。考虑到图 12 和图 16 之间的相似性，这个数值是比较惊人的。现在我们回到维数，它是作为随着相空间的距离趋于零的极限来定义的，因此，它是精细结构而不是粗糙结构的一个度量。通常吸引子在统计上被认为是自相似的，因甚至不去研究其精细结构。不过，在本例中，两个图有相同的粗糙结构，但精细结构明显不同；在雪橇吸引子中，点趋向于汇合成曲线，如在图 64 中的分数维尺度中心的情况；而在滑板吸引子中，点更倾向于扩散和充满区域，如图 64 中分数维尺度右边的情况。这一点在图 66 和图 67 中是十分明显的，因为两个吸引子的相似的截面被放大了 10 倍。

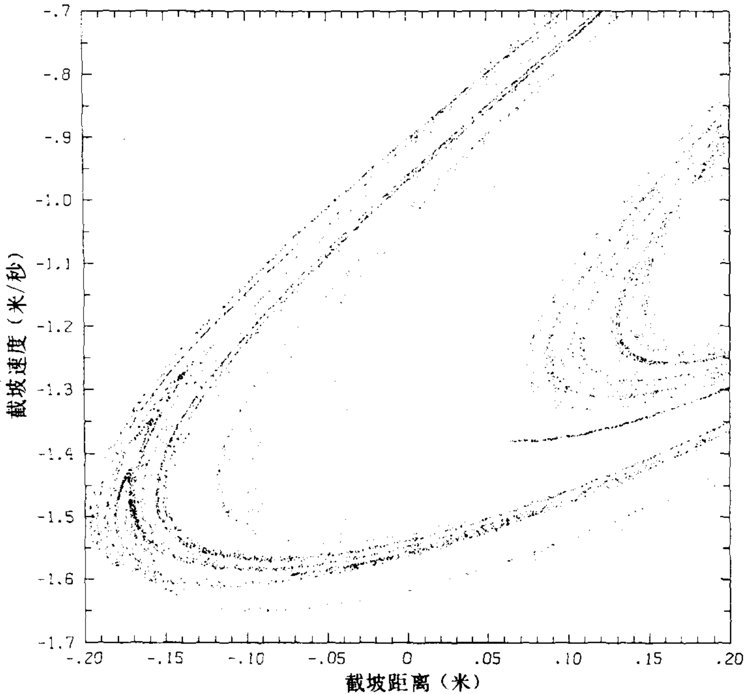


图 67 图 16 中所示滑板模式吸引子截面放大 10 倍后的情形

同宿性和马蹄

让我们回到在滑雪坡道上下滑的雪橇。虽然它的一般行为是混沌的，但是它可以沿两个简单的周期轨道运行，并且，如果我们等候足够长久的话，它还可以沿其中的一个周期轨道运行一段时间。在这些轨道上，雪橇每下降 5 米就要准确地向东或向西移动 2 米。

通过每 5 米间隔观测雪橇所产生的 V 关于 y 的 Poincaré 映射中，这些轨道是以不动点形式出现的。现在考虑含有其中一个不动点的一个小圆。在映射下，它的连贯的映像也是一个围绕不动点的

闭合曲线，头几个映像很像是椭圆。因为不动点是不稳定的，因而椭圆的长轴将不断地增长，但因为系统是耗散的，因而所围的面积和短轴将不断地缩小。连续的映像日益趋于紧密所形成的无穷长的曲线叫做不动点的不稳定流形，记为 U。当距离是沿着 U 测定时，在 U 上的任一点可以被映射到一个更加远离不动点的点，尽管其直线距离通常是比较小的。在这个特殊的映射中，U 在图解上是很难与吸引子区别的。

同样我们也能刻划稳定流形 S，它被看作是该图的连贯的逆映射的极限形式。在 S 上的点被映射到离不动点较近的点，并且最终它们的正映像要收敛到不动点。相反，在 U 上的点要从不动点流出；即是说，它们的逆映像要收敛到不动点。含有更多变量的更一般的系统可以有多维的不稳定流形和稳定流形。

图 68 给出了雪橇模式的一个不动点的两种流形的片断，不动点用 O 标记。坐标系是在图 13 中所应用的一个圆柱内部的透视图。明显的特征是 U 和 S 在 C 点横向相交。

在任一个流形中的任何连贯的映像序列都是 Poincaré 的渐近解之一。因为含有 C 点的序列位于两个流形上，所以，它是双渐近解，并且 O 是 Poincaré 同宿点中的一个点。显然，如果我们令 D 和 E 是 C 的头两个正映像，那么，U 和 S 还要在 D 点然后在 E 点相交。相反，如果 B 和 A 是 C 的头两个逆映像，那么，S 和 U 还要在 B 点然后在 A 点相交。事实上，C 点丝毫不比 A、B、D 和 E 点特殊。

虽然沿着 S 测量的 C 的连贯的正映像之间的距离连续地减少，沿着 U 测量的同样点之间的距离却连续地增加。相反，沿着 S 测量的连贯的逆映像之间的距离连续地增加。由此我们得到结论：随着 U 和 S 的延伸，U 和 S 都将会连续发生较大的变形，而且它们不可避免地要在许多点（除了 C 的映像以外）相碰。

注意，在我们的例子中，事实上也在大量的系统中，两个流形中任一流形上的一个点（包括靠近 O 点的点）的连贯的映像都位

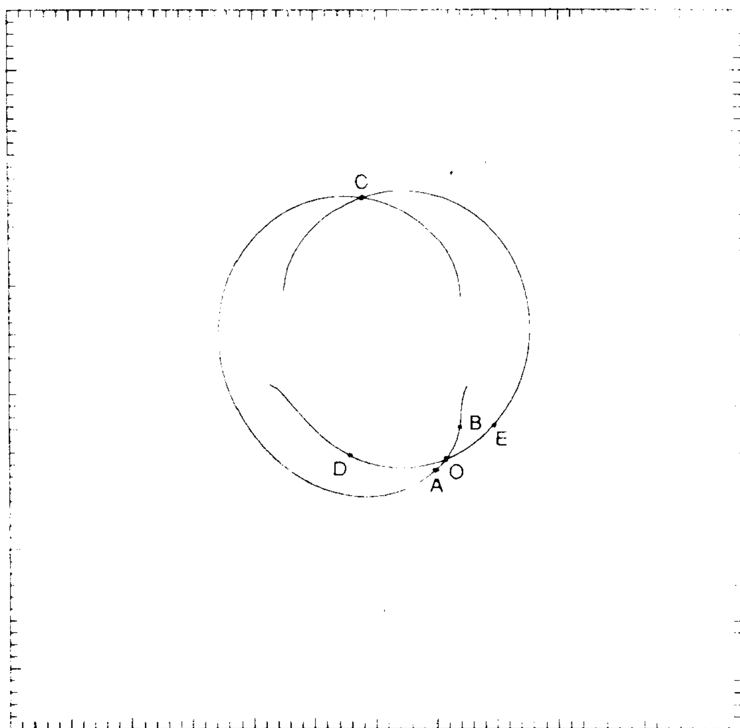


图 68 在滑雪坡道上的雪橇的 Poincaré 映射的一个不动点 O 的不稳定流形和稳定流形的线段。不稳定流形通过 A 点和 B 点，稳定流形通过 D 点和 E 点。两个流形在 C 点横向相交，点 B、C、D 和 E 是 A 点的相继映像。坐标系与图 13 和图 37 相同

于 O 的对边上。因此，在图中，由于 U 从 O 点向左边延伸通过 C，因而其右边的延伸必须通过 D，而左边的延伸必须通过 E，相反，S 的右边延伸通过 C 和 A，而左边的延伸通过 B。这个情况绝不影响 Poincaré 理论的正确性。

在这个例子中作多次迭代去延伸 S 在计算上是不方便的，因为这样做，我们必须随时间向后积分微分方程组。这相当于用负摩

擦代替摩擦，这样 V 能够迅速地增加，在 1 秒钟内就能使其加倍。因为这里我们主要的兴趣只在于流形的相交，而且因为 U 从未遇到过超过 5 米/秒的 V 值，所以在 S 上 V 的高值是无所谓的，我们还可以修改方程组去抑制 V 的高值，而保留 V 的低值不变。

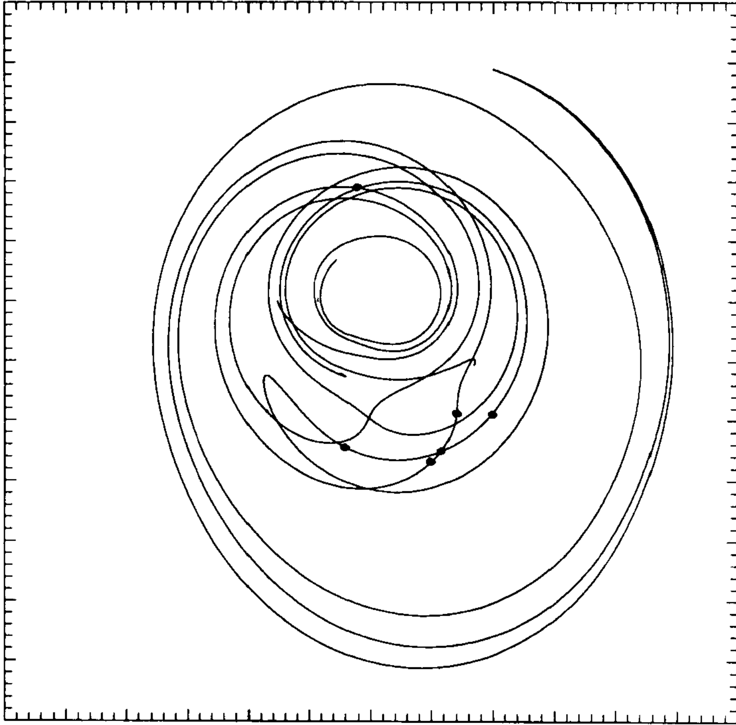


图 69 经过 2 次迭代后扩大的图 68 的片断。每个交点都是一个流形与另一流形的相交。粗黑点表明的是在图 68 中的 A、B、C、D、E 和 O 点。稳定的流形向离开中心最远处以及最靠近中心处延伸。孤立的不稳定流形，作多次迭代延伸将与图 37 无区别

图 69 给出了两个流形在引入修改以后每个流形再迭代一次的延伸情况。在一些区域两个流形很难分辨，但是，因为没有一个

流形自身相交，所以，给出的所有 22 个交点都是一个流形与另一流形的相交。

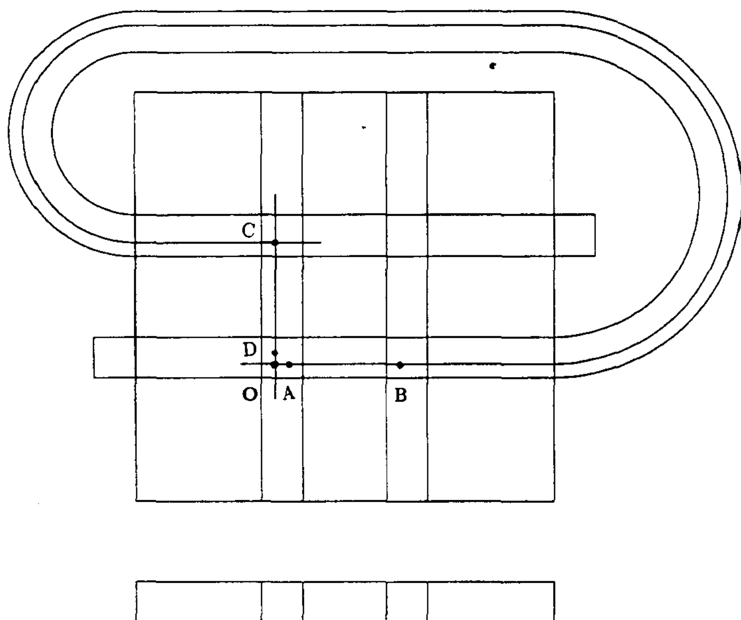


图 70 马蹄映射的早期形式，不动点 O 的不稳定流形的一个片断水平延伸通过 A 和 B，稳定流形的片断垂直延伸通过 D，在 C 点横向相交，点 B、C 和 D 是 A 的相继映像

为了充分分析同宿性的意义，比较方便的办法是回到 Smale 马蹄。图 70 是 Smale 最早给出的类似结构，以后才因为它非常像一个马蹄而自然地取名马蹄。为了构造一个特例，我们从一个正方形出发，它的两个侧边位于 $x=0$ 和 $x=1$，而底边和顶边分别位于 $y=0$ 和 $y=1$。通过画垂直线 $x=0.3$、0.4、0.6 和 0.7 把正方形分成五个部分。将正方形垂直地压缩到原有的 1/10，形成一个细长的矩形，见图 70 的下图。然后将现在已成为小方块的第二和第四部分水平地拉长为原有的 10 倍，而将中间的一块水平地拉长

成原有的 10 倍还多，将两端的两块水平地压缩，再将拉长的中间一块弯曲，最后在原有正方形的基础上绘制成如图 70 所示的总体结构。所说的第二和第四垂直截面现已成为第二和第四水平的细长条并且它们分别位于 $y=0.3$ 和 $y=0.4$ 之间及 $y=0.6$ 和 0.7 之间。对于现在仍留在正方形内的部分（它正是我们所唯一关心的），映射方程组是：

$$x_{n+1}=10x_n-3,\quad y_{n+1}=(y_n+3)/10,\quad 0.3<x_n<0.4$$

$$x_{n+1}=10x_n-6,\quad y_{n+1}=(y_n+6)/10,\quad 0.6<x_n<0.7$$

逆映射方程组是：

$$x_{n-1}=(x_n+3)/10,\quad y_{n-1}=10y_n-3,\quad 0.3<y_n<0.4$$

$$x_{n-1}=(x_n+6)/10,\quad y_{n-1}=10y_n-6,\quad 0.6<y_n<0.7$$

其形式与前面相同，只是 x 和 y 相互交换位置。

映射有两个不动点，分别在(1/3,1/3)和(2/3,2/3)。每个点的不稳定流形水平地延伸，在离开方块时，不稳定流形弯曲，而稳定流形垂直地延伸。图 70 指明了 O 点的两个流形在(1/3,1/3)处的片断；它们看来是在(1/3,19/30)处的 C 点横向相交，所以 O 是同宿的，在同宿点流形屡次相交，事实上是无限次相交。

现在注意到，如果我们取原来在第二和第四垂直截面中的任一点，而且把它的坐标记为小数的形式，那么，从 x 中移去领头的数字（必定是 3 和 6）并把它挪到 y 的前头就得到它的映像，例如(0.3207,0.549) 的映像(0.207,0.3549)。相反，一个点的逆映像是将领头的数字从 y 转到 x 上。在映射中，映像只是简单地转换一下点的领头的数字并使其它点的位置移位，这类映射称为 Bernoulli（伯努利）移位。

由此得到结论：那些正映像和逆映像都在方块内的点 (x,y) 乃是 x 和 y 用小数表示只包含 3s 和 6s * 的那些点。这些点形成一个明显的 Cantor 集。在 O 点的稳定流形上的点乃是 x 的表达式中

* 这里的 3s 或 6s 表示 3 或 6 的复数，即若干个 3 或 6——编者注

只有有限个 6s 的那些点，所以，在有限次向前迭代以后，x 的所有的领头数字都是 3s，也就是 $x = 1/3$，并且在更多次的向前迭代以后，y 的领头数字逐渐变成 3s，也就是 y 趋向于 1/3。在 O 点的不稳定流形上的点是 y 包含有限个 6s 的那些点。因此，x 和 y 都包含有限个 6s 的点乃是流形的交点，这样的点显然有无穷多个。

如果把 x 数字后的 y 的数字反过来排列，就形成一个周期序列，譬如说在 n 位数字以后序列重复，那么(x,y) 的第 n 个正映像或逆映像还是(x,y)，并且(x,y) 将位于一个周期解上。因此，周期解有无穷多个。随机选择出的 3s 和 6s 的无穷序列通常不是周期的，所以非周期解也有无穷多个。显然我们现在看到的是混沌，至少是在特定的意义下。我们能够通过简单地构造 3s 和 6s 的非正常序列寻找出有特殊性质甚至独特性质的解。一个具有有趣行为的解可产生，例如，当 n 是完全平方数时，令 x 和 y 的第 n 位数为 6 即能得到这种解。采用数字 3 也一样。

因为映射在正方形的一部分中已被变为线性映射，因而我们才能写出在不稳定流形、稳定流形和在周期解上的点的显式表达式。如果我们应用一个更为简单的马蹄，其中压缩、伸长和弯曲的方块简单地从原来的方块右边出去，然后再在右边进入，虽然映射还涉及到某些 3s 和 6s 的变换以及移位，我们仍然可以写出不稳定流形、稳定流形和周期解上的点的显式表达式。但是定性的结果都具有拓朴性质；它经过映射的连续变形也不会改变。如果一个马蹄是如图 41 的形式或者有更多的变形，我们仍可得到如下结论：流形相交的数目和性质不同的周期解、非周期解的数目将是无穷大。

附录3 简明词汇

这个词汇表给出了经常出现在混沌研究领域中的动力系统的一些术语，主要是给普通读者写的，目的在于让读者对每个概念有一些感性认识，正由于此，这里给出的定义是描述性的，有时用口头语言形式，而不是用标准的数学语言。有些定义还缺少数学的严谨，但专家们把这些描述性的定义转化为严格的术语应该是不成问题的。

为了避免重复，大多数的定义中包含的术语也都在本词汇中列出条目。这类术语第一次出现在定义中时我们均着重表示。可以预料；读者使用本词汇主要是为了去查看在阅读本书中所遇到的一些术语的意义。本词汇表是完备的[*]，那些喜欢从起跑线开始[**]的读者，可以通过适当的不按字母顺序的重新编排条目，“系统”作为第一个词条，接下来的词条是变量、常数和状态等等，从而防止遇到任何早先未定义的术语。希望通过按字母顺序的排列浏览一下的读者应该注意名字以“A”开始的概念往往是最简单的[***]。

大部分定义是按照相空间的术语作出的。也就是点通常用来表示系统的状态，轨道表示状态的时间序列（等价地说，如果系统是用方程组来定义的，轨道就是一个特解）等。注意：不动点在习惯上被看作轨道的特殊情形。

读者应该了解，许多术语在别的教科书中有别的含义，包括其它技术上的意义。

---

* 即每一词条定义中所用的术语在本词汇中均另列词条加以定义——校者注

** 即从一个不需用其它术语来作定义的术语开始——校者注

*** 在本附录最后将给出汉语拼音顺序排列的简明词汇表——编者注

Almost-periodic orbit（准周期轨道）：这样一种轨道，该轨道在经过越来越长的固定的时间间隔以后，越来越接近于重复它过去的全部历史。参见周期轨道词条。

Approach（a **point** or a **set**）（**趋近于**）（一个点或一个集合）：在任何预先给定的准确度内接近于且最终一直接近于。通俗地讲，就是越来越靠近。

Approach infinity（趋于无穷大）：变得越来越大且最终一直大于任何预先选定的量。

Asymptotic orbit（渐近轨道）：趋近于一个不动点或一个周期轨道或准周期轨道的瞬变轨道。

Attracting set（吸引集）：在一个耗散系统中，由所有轨道的极限集以及从该集出发的轨道上的所有的点所组成的集合。

Attractor（吸引子）：在一个耗散系统中，不属于任何更大极限集，且无轨道由其发出的极限集。

Axis（轴）：由通过原点且相互垂直的直线所组成的一个特殊集合中的任何一条直线，用来作为参考线。

Basin of attraction（吸引域）：位于趋近于一给定吸引子的轨道上的所有点所组成的集合。

Bifurcation（分岔）：在一族动力系统中，当一个参数值从某个临界值以下变到该临界值以上时，系统长期行为的一个突然变化。

Butterfly effect（蝴蝶效应）：一个动力系统状态的一个微小改变所引起的后续状态与没有微小改变时的后续状态明显不同的现象；即敏感依赖性。

Cantor set（康托尔集）：1. 在一条直线或一条曲线上这样一些点的集合，即在其中任意两个点之间总有该点集的其它一些点以及有限宽度的间隙。 2. 以上定义的 **Cantor** 集向更高维的推广。

Capacity(容量维):集合维数的一种特殊量度,它是根据覆盖该集合所需立方体或球体的数目随着每个立方体边长或球体直径的减小而增加的速率得到的。

Chaos(混沌):1. 表征一个动力系统的特性,在该系统中大多数轨道显示敏感依赖性;即完全混沌。2. 有限混沌:表征一个动力系统的特性,在该系统中某些特殊的轨道是非周期的,但大多数轨道是周期的或准周期的。

Chaotic sea(混沌海):在 **Hamilton** 系统中,一个混沌轨道所趋近的集合。

Compact system(紧致系统):一个这样的动力系统,在该系统中每个轨道具有一个极限集。

Completely random(完全随机):见随机条。

Conservative system(守恒系统):一个这样的动力系统,在该系统中,某些表面上的变量实际上随时间保持不变。

Constant (of a **system**)(**常数**)(一个系统的):不随时间变化的特征。

Coordinate(of a **point**) (**坐标**)(一个点的):原点与一个特定轴上距给定点最近的点之间的距离。

Deterministic system(确定性系统):这样一种系统,在该系统中,后面的状态由早先的状态按一固定的规律演变而来。

Difference equation(差分方程):这样一种方程,它能利用一个系统的所有变量在给定时刻值来表示该系统某一变量在下一时刻的值。

Differential equation(微分方程):这样一种方程,它能把一个系统的某一变量在给定时刻的变化率用该系统所有变量在该时刻的值来表示。

Dimension(维数):点集的许多测度中的任一个,当集合是一个点、一条曲线或一个曲面或其它流形时,它与维数的经典概念是一致的,对于更一般的集合,维数也经常定义为分数。

Dissipative system(耗散系统):这样一种动力系统,在该系统中相空间的有限体积的任何点集的映像都是更小体积的点集。

Doubly asymptotic orbit(双渐近轨道):这样一种轨道,它渐近于一个不动点或一个周期轨道,并从一个不动点或一个周期轨道发出。

Dynamical system(动力系统):一个确定性系统。更随意些说,它也可以是一个带有较小随机性的系统,如果该系统的随机性稍加消除后,其定性行为无明显变化的话。

Emanate from (发出于):与趋近于相反,即沿着与趋近于相反方向的轨道运行。

Equilibrium(平衡态):一个不动点或有时为一周期轨道。

Family(族):除一个或多个常数值不同外其余均相似的一组动力系统。

Fixed point(不动点):与自身映像相同的点。

Flow(流):其所有变量都是按随时间连续变化的值来定义的一个动力系统。一个流经常由一组微分方程控制。

Fractal (分形):维数不是整数的点集。也指维数"碰巧"是一个整数的一组类似结构。

Full chaos(完全混沌):见混沌。

Hamilton system(哈密顿系统):某种类型的保守的体积守恒系统。

Homoclinic point(同宿点):同宿轨道从其发出,紧接着又向其趋近的不动点。

Homoclinic orbit(同宿轨道):渐近于不动点或周期轨道同时又从该不动点或该周期轨道发出的轨道。

Horseshoe(马蹄):一个特殊类型的二维映射,在该映射中一个正方形或某个其它的区域被映射到一个变形的区域,该区域与原区域在两个分离的块中相交。

Image(映像):通过规定次数的迭代而由一给定集合产生的点集。除另有说明外对于映射迭代一次;对于流,按规定的次数迭代。

Initial conditions(初始条件):在任何一段持续时间开始时刻系统的状态,这段时间的长短随研究者的目的而定。

Invariant set(不变集):与其自身映像相同的点集。

Inverse image(逆映像):其映像由一个给定集组成的点集。

Invertible system(可逆系统):其中每一点有且只有一个逆映像的动力系统。

Limit set(of an orbit)(极限集)(一个轨道的):被一个轨道所趋近并且其中不包含该轨道所趋近的更小集合的集合。通俗地讲,即由轨道一再非常接近地通过的每一点所组成的集合。

Limited chaos(有限混沌):见混沌。

Linear system(线性系统):这样一个系统,在该系统中初始状态的变化将导致任何后续状态成比例地变化。

Logistic equation(逻辑斯谛方程):关于一个变量的一种特殊的二次差分方程。

Lyapunov exponents(李雅普诺夫指数):**Lyapunov** 数的对数。

Lyapunov numbers(李雅普诺夫数):在相空间中当一个无限小椭球被它的逐次映像所代替时该椭球各轴长度放大(或缩小)倍数的长时间平均值。

Manifold(流形):一个点、一条曲线、一个曲面或一个体积或其在

多维空间中的推广。

Mapping(映射):其变量仅通过时间的离散值来定义的动力系统。映射经常由一组差分方程控制。

Model(模式):被设计成的具有另一通常更为复杂系统的某些特性的系统。

Nonivertible system(不可逆系统):这样一种动力系统,其中某些点有几个或完全没有逆映像;也就是非可逆的系统。

Nonlinear system(非线性系统):其初始状态的变化未必会导致后续状态成比例地变化的系统;即不是线性的系统。

Nonperiodic orbit(非周期轨道):这样一个轨道,在该轨道上任何与过去状态非常接近的重复仅有短暂的持续时间;一个既不是周期的又不是准周期的轨道。

Orbit(轨道):对相空间中连续的或者离散的状态时间序列的表述。

Origin(原点):在相空间或普通空间中用作参考点的一个特殊的点。

Parameter(参数):一个这样的常数,其值对于一族动力系统中的每个动力系统是不同的。

Period(周期):一个周期轨道中,重复出现的次数或连续两次重复的时间间隔。

Period-doubling bifurcation(倍周期分岔):1. 一种分岔,由一个具有周期的典型轨道的系统向另一个也具有周期的典型轨道但其周期长度却增加了一倍的系统分岔。2. 如上所定义的一个倍周期分岔的无穷序列,该序列将以混沌行为而终结。

Periodic orbit(周期轨道):经过一固定时间间隔后,准确地重复其过去行为的轨道。

Periodic system(周期系统):一个这样的系统,在该系统中,除了极少数的轨道以外,轨道都是周期的或准周期的,或者是渐近于周期或准周期轨道的。

Periodic window(周期窗口):在一族动力系统中,对于某一参数的这样一些连续数集,这些值使相应的系统不是混沌的,它们与使该系统为混沌的另外一些值相分离。

Phase space(相空间):一个假想的空间,它的维数与规定一给定动力系统的状态所需的变量数目相同。在相空间中一个点的坐标乃是这些变量的一组同时的值。

Poincaré mapping(庞加莱映射):这样一种映射,该映射的相空间是一个流的相空间的一个庞加莱截面,并且其中一个点的依次映像乃是在流中的一个轨道与 **Poincaré** 截面的依次相交。

Poincaré section(庞加莱截面):与许多或大多数轨道相交的一个流的相空间的横截面。

Point(点):动力系统的状态在相空间中的表述。

Random system(随机系统):1. 这样一种系统,在该系统中,从前面状态到后来状态的演化不是完全由任何规律决定的;即是非确定的系统。2. 这样一种系统,在该系统中,后来状态的发生完全独立于前面的状态;即完全随机的系统。

Self-similar set(自相似集):这样一种集合,该集合的一部分如果被放大,与原有的集合完全一样。

Sensitive dependence(敏感依赖性):表征一个轨道的这样一种特性,即:在某一点接近于该轨道通过的大多数其它轨道随着时间的推移并不仍然保持与它接近。

Separatrix(分型线):分开两个吸引域的界线。

Set (of points)(集合)(点的):点的任何聚合;通常,它是一条曲

线、一个曲面或是某些别的可视为是点的聚合体的结构。

Stable equilibrium(稳定平衡态)：没有任何轨道从其发出的一个不动点或一个周期轨道。

Stable manifold(稳定流形)：一个由趋近于一给定不动点或周期轨道的一组轨道所形成的流形。

State(状态)：系统在一个瞬时的状况；系统所有变量的一组同时的值。

Statistically self-similar set(统计自相似集)：这样一种集合，该集合的一部分如果被放大，与原集合有相同的典型结构。

Strange attractor(奇怪吸引子)：有分形结构的吸引子；与一适当的流形相交为一**Cantor**集的吸引子。

Surface of section(截面)：一个**Poincaré**截面。

System(系统)：能够随着时间推移，经受某类变化的任何统一体。

Transient orbit(瞬变轨道)：与其自身的极限集无公共点的轨道。

Unstable equilibrium(不稳定平衡态)：至少有一条轨道自其发出的不动点或周期轨道；即不稳定的平衡态。

Unstable manifold(不稳定流形)：从一给定不动点或周期轨道发出的轨道上的全部点所组成的流形。

Variable(of a system)(**变量**)(一个系统的)：能随时间推移而变化的某种特征。

Volume-preserving system(体积守恒系统)：这样一种动力系统，在该系统中，相空间中任何点集的映像是一个具有同样体积的集合。

简明词汇汉文索引*

* 此索引为编者所做，便于以汉语拼音查阅

混沌海	Chaotic sea
极限集	Limit set
集合	Set
渐近轨道	Asymptotic orbit
截面	Surface of section
紧致系统	Compact system
康托尔集	Cantor set
可逆系统	Invertible system
李雅普诺夫数	Lyapunov numbers
李雅普诺夫指数	Lyapunov exponents
流	Flow
流形	Manifold
逻辑斯谛方程	Logistic equation
马蹄	horseshoe
敏感依赖性	Sensitive dependence
模式	Model
逆映像	Inverse image
庞加莱截面	Poincaré section
庞加莱映射	Poincaré mapping
平衡态	Equilibrium
奇怪吸引子	Strange attractor
趋近于	Approach
趋于无穷大	Approach infinity
确定性系统	Deterministic system
容量维	Capacity
守恒系统	Conservative system
双渐近轨道	Doubly asymptotic arbit
瞬变轨道	Transient orbit
随机系统	Random system
体积守恒系统	Volume-preserving system
同宿点	Homoclinic point

同宿轨道	Homoclinic orbit
统计自相似集	Statistically self-similar set
完全混沌	Full chaos
完全随机	Completely random
微分方程	Differential equation
维数	Dimension
稳定流形	Stable manifold
稳定平衡态	Stable equilibrium
吸引集	Attracting set
吸引域	Basin of attraction
吸引子	Attractor
系统	System
线性系统	Linear system
相空间	Phase space
映射	Mapping
映像	Image
有限混沌	Limited chaos
原点	Origin
周期	Period
周期窗口	Periodic window
周期轨道	Periodic orbit
周期系统	Periodic system
轴	Axis
状态	State
准周期轨道	Almost-periodic orbit
自相似集	Self-similar set
族	Family
坐标	Coordinate

参考文献

专门论述混沌的著作之多已使得任何人要全部或大部分熟悉它们是很困难的，何况它们还在不断膨胀。郝柏林已选了两千多条文献目录作为他的《混沌》和《混沌Ⅱ》的选编文集的补充，而郝柏林的夫人张淑誉接着在她的《关于混沌的参考文献》中列出了7460条目录(其中包括303本书目)，该书在1991年出版。

在编辑本文献目录时，我舍弃了这样的想法，即挑选出少量代表性著作作为范例，或尽力鉴别出“重要的”文献。这种工作既艰巨又可能不切实际。因此，本文献目录必然像正文一样，挑选的多少是我比较熟悉的文献。最后选定的文献列成了一份目录表，它们分属于三大类。第一类和第二类中的某些文献也可归入第三类。

第一类文献是少量的完全或大部分属于非专业性的著作，它们可以为你提供一些轻松的阅读材料。这些著作包括 H. Poincaré 的著名的散文集“科学和方法”直至最近由 J. Casti, I. Ekeland, J. Gleick, B. Mandelbrot, H.-O. Peitgen 和 P. Richter, I. Peterson, D. Ruelle 以及 I. Stewart 等人所写的比较简单洁的书，这些书给混沌现象以叙述性的说明。这类著作还包括由气象学家 G. Platzman 和 P. Thompson 所写的历史性叙述以及由 S. Smale 所写的简短的自传体的文章。

第二类是一些课本和其它较为专业化的著作，它们主要是为了让初学者了解动力系统和混沌的原理，而不是给出任何有创新的发现。这些文献包括由 Abraham 和 Shaw, Berge 等, Birkhoff, Cvitanovic, Devaney, Glass 和 Mackey, Guckenheimer 和 Holmes, Gumowski 和 Mira, Holden, Lichtenberg 和 Lieberman, Moon, Nemytskii 和 Stepanov, Ruelle, Schuster 以及 Swinney 和 Gollub 等人所写的著作，以及 Smale 的综合性评述。Ruelle 的“概率和混沌”应归入第一类，而他的“混沌的演化和奇怪吸引子”则应划归第二类。

第三类范围最广，它包括在本书中我特别参考的或者只是通常顺便提到的著作。这类著作形成一个比较掺杂不齐的集合。大多数是论述最新研究结果的科学论文，但有一些是综述的论文或书，甚至还有由 R. Bradbury 所写的一本短篇小说和由 G. R. Stewart 写的一本小说。

Abraham, R. H., and C. D. Shaw. *Dynamics; the Geometry of Nature*. Rewood City, CA: Addison-Wesley, 1982.

Barnsley, M. F. "Making Chaotic Dynamical Systems to Order." In *Chaotic Dynamics and Fractals*, ed. M. F. Barnsley and S. G. Demko, pp. 53—68. Orlando: Academic Press, 1986.

Beddington, J. R., C. A. Free, and J. H. Lawton. "Dynamic Complexity in Predator-Prey Models Framed in Difference Equations." *Nature*, 255 (1975): 58.

Bergé P., Y. Pomeau, and C. Vidal. *Order Within Chaos*. New York: Wiley, 1984.

Birkhoff, G. D. *Dynamical Systems*. Providence: American Mathemathical Society, 1926.

Birkhoff, G. D. "Sur Quelques Courbes Fermées Remarquables." *Bull. Soc. Math. Fracnce*, 60 (1932): 1—26.

Bjerknes, V. "Das Problem der Wettervorhersage, betrachtet vom Standpunkte der Mechanik und der Physik." *Meteorol. Zeitschr*. 21 (1904): 1—7.

Bjerknes, V. "Application of Line Integral Theorems to the Hydrodynamics of Terrestrial and Cosmic Vortices." *Astrophys. Norvegica*, 2, No. 6 (1937): 263—339.

Bradbury, R. D. "A Sound of Thunder." In *The Stories of Ray Bradbury*, pp. 231—241. New York: Alfred A. Knopf, 1980.

Cantor, G. "Grundlagen einer allgemeinen Mannichfältigkeitslehre." *Math. Annalen*, 21 (1883): 545—591.

Cartwright, M. L., and J. E. Littlewood. "On Non-Linear Differential Equations of the Second Order: I. The eqation $\ddot{y} - k(1 - y^2)\dot{y} + y = b\lambda\cos(\lambda t + \alpha)$, k large." *J. London Math. Soc*. 20 (1945): 180—189.

Casti, J. *Searching for Certainty*. New York: Morrow, 1990.

Charney, J. G., R. G. Fleagle, V. E. Lally, H. Riehl, and D. Q. Wark. "The Feasibility of a Global Observation and Analysis Experiment."

Bull. Amer. Meteorol. Soc. 47(1966):200—220.

Chirikov, B. V., and F. M. Izrailev. "Degeneration of Turbulence in Simple Systems." *Physica.* D2(1981):30—37.

Cvitanovic, P. *Universality in Chaos: a Reprint Selection.* Bristol: Adam Hilger, 1984.

Devaney, R. L. *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems.* Menlo Park, CA: Benjamin/Cummings, 1986.

Duffing, G. *Erzwangene Schwingungen bei Voränderlicher Eigenfrequenz und ihre Technische Bedeutung.* Braunschweig: Vieweg, 1918.

Ekeland, I. *Mathematics and the Unexpected.* Chicago: University of Chicago Press, 1988.

Faller, A. "A Demonstration of Fronts and Frontal Waves in Atmospheric Models." *J. Meteorol.* 13(1956): 1—4.

Feigenbaum, M. "Quantitative Universality for a Class of Nonlinear Transformations." *J. Statistical Phys.* 19(1978):25—52.

Ford, J. "How Random is a Coin Toss." *Physics Today,* 36, No. 4(1983): 40—47.

Franklin, P. "Almost Recurrent Periodic Motions." *Math. Zeitschr.* 30 (1929): 325—331.

Fultz, D., R. R. Long, G. V. Owens, W. Bohan, R. Kaylor, and J. Weil. "Studies of Thermal Convection in a Rotation Cylinder with Some Implications for Large-Scale Atmospheric Motion." *Meteorol. Monographs* (American Meteorological Society), 21, No. 4(1959).

Glass, L., and M. C. Mackey. *From Clocks to Chaos.* Princeton: Princeton University Press, 1988.

Gleick, J. *Chaos: Making a New Science.* New York: Viking Penguin, 1987.

Guckenheimer, J. "A Strange, Strange Attractor." In *The Hopf Bifurcation and Its Applications,* ed. J. E. Marsden and M. McCracken, pp. 368—381. New York: Springer-Verlag, 1976.

Guckenheimer, J., and P. Holmes. *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields.* New York: Spinger-Verlag,

1983.

Gumowski, I., and C. Mira. *Recurrences and Discrete Dynamic Systems.* Lecture Notes in Mathematics, 809. New York: Springer-Verlag, 1980.

Haken, H. "Analogy between Higher Instabilities in Fluids and Lasers." *Phys. Letters.* 53A (1975): 77.

Hao, B.-L. *Chaos.* Singapore: World Scientific, 1984.

Hao, B.-L. *Chaos* II. Singapore: World Scientific, 1990.

Hide, R. "Some Experiments on Thermal Convection in a Rotating Liquid." *Quart. J. Roy. Meteorol. Soc.* 79 (1953): 161.

Hill, G. W. "Researches in the Lunar Theory." *Amer. J. Math.* 1 (1878): 5—26.

Holden, A. V., ed. *Chaos.* Princeton: Princeton University Press, 1986.

Kaplan, J. L., and J. A. Yorke. "Chaotic Behavior of Multidimensional Difference Equations." In *Functional Differential Equations and Approximation of Fixed Points*, ed. H.-O. Peitgen and H. O. Walther, pp. 204—227. Lecture Notes in Mathematics, 730. Berlin: Springer-Verlag, 1979.

Keffe, D. H., and B. Laden. "Correlation Dimension of Woodwind Multiphonic Tones." *J. Acoustical Soc. Amer.* 90 (1991): 1754—1765.

Kutta, W. "Beitrag zur naherungsweisen Integration totaler Differentialgleichungen." *Zeit. Math. Phys.* 46 (1901): 435—453.

Li, T. Y., and J. A. Yorke. "Period Three Implies Chaos." *Amer. Math. Monthly.* 82 (1975): 985—92.

Libchaber, A., and J. Maurer. "Local Probe in a Rayleigh-Bénard Experiment in Liquid Helium." *J. Physique-Lettres.* 39 (1978): L-369—L-372.

Lichtenberg, A. J., and M. A. Lieberman. *Regular and Stochastic Motion.* New York: Springer-Verlag, 1983.

Lorenz, E. N. "The Statistical Prediction of Solutions of Dynamic Equation." *Proc. Internat. Symapos. Numer. Weather Pred.* Tokyo: Meteorological Society Japan (1962): 629—635, 647.

Lorenz, E. N. "Deterministic Nonperiodic Flow." *J. Atmos. Sci.* 20

(1963): 130—141.

Lorenz, E. N. "Atmospheric Predictability Experiments with a Large Numerical Model." *Tellus*, 34 (1982): 505—513.

Lorenz, E. N. "Irregularity: a Fundamental Property of the Atmosphere." *Tellus*, 36A (1984): 98—110.

Mandelbrot, B. B. "How Long Is the Coast of Britain? Statistical Self-similarity and Fractional Dimension." *Science*, 156 (1967): 636—638.

Mandelbrot, B. B. *The Fractal Geometry of Nature*. San Francisco: W. H. Freeman, 1982.

Markov, A. A. "Stabilität im Liapounoffschen Sinne und Festperiodizität." *Math. Zeitschr.* 36 (1933): 708—738.

May, R. M. *Stability and Complexity in Model Ecosystems*. Princeton: Princton University Press, 1973.

May, R. M. "Simple Mathematical Models with Very Complicated Dynamics." *Nature*, 261 (1976): 459—467.

McDonald, S. W., C. Grebogi, E. Ott, and J. A. Yorke. "Fractal Basin Boundaries." *Physica*, *D*17 (1985): 125—153.

Moon, F. C. *Chaotic Vibrations*. New York: Wiley, 1987.

Nemytskii, V. V., and V. V. Stepanov. *Qualitative Theory of Differential Equations*. Princeton: Princeton University Press, 1960.

Newton, I. *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*. London: S. Pepys, 1686.

Peitge, H.-O., and P. H. Richter. *The Beauty of Fractals*. New York: Springer-Verlag, 1986.

Peterson, I. *The Mathematical Tourist*. New York: Freeman, 1988.

Phillips, N. "The General Circulation of the Atmosphere: a Numerical Expericment." *Quart. J. Roy. Meteorol. Soc.* 82 (1956): 123—164.

Platzman, G. W. "Charney's Recollections." In *The Atmsophere — a Challenge*, ed. R. S. Lindzen, E. N. Lorenz, and G. W. Platzman, pp. 11—85. Boston: American Meteorological Society, 1990.

Poincaré H. *Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste*. Paris:

Gauthiers-Villar, 1893.

Poincaré H. *Science et Méhtode*. Paris: Flammarion, 1912. English translation: *Science and Method*. Lancaster, PA: Science Press, 1913.

Prigogine, I., and I. Stengers. *Order Out of Chaos*. New York: Bantam, 1984.

Reed, R. "The Present Status of the 26-Month Oscillation." *Bull. Amer. Meteorol. Soc.* 46(1965): 374—387.

Richardson, L. F. *Weather Prediction by Numerical Process*. Cambridge: Cambridge University Press, 1922.

Robbins, K. A. "A Moment Equation Description of Magnetic Reversals in the Earth." *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* 73(1976): 4297—4301.

Rössler O. E. "An Equation for Continuous Chaos." *Physics Letters*, A57 (1976): 397—398.

Ruelle, D. "Strange Attractors." *Math. Intelligencer*, 2, No. 126(1980): 37—48.

Ruelle, D. *Chaotic Evolution and Strage Attractors*. Cambridge: Cambridge University Press, 1989.

Ruelle, D. *Chance and Chaos*. Princeton: Princeton University Press, 1991.

Ruelle, D., and F. Takens. "On the Nature of Turbulence." *Commun. Math. Phys.* 20(1971): 167—192.

Runge, C. "Über die numerische Auflösing von Differential-Gleichungen." *Math. Annalen*, 46(1895): 167—178.

Saltzman, B. "Finite Amplitude Free Convection as an Initial Value Problem — I." *J. Atmos. Sci.* 19(1962): 329—341.

Schuster, H. G. *Deterministic Chaos*. Weinheim: Physik-Verlag, 1984.

Segel, L. A. "The Structure of Non-linear Cellular Solutions to the Boussinesq Equations." *J. Fluid Mech.* 21(1965): 345—358.

Shaw, N. *Manual of Meteorology*. Cambridge: Cambridge University Press, 1926.

Smale, S. "Differentiable Dynamical Systems." *Bull. Amer. Math. Soc.* 73 (1967): 747—817.

Smale, S. "How I Got Started in Dynamical Systems." In *The Mathematics of Time*, by S. Smale, pp. 147－151. New York: Springer-Verlag, 1980.

Sparrow, C. *The Lorenz Equation: Bifurcations, Chaos, and Strange Attractors*. New York: Springer-Verlag, 1982.

Stewart, G. R. *Storm*. New York: Random House, 1941.

Stewart, I. *Does God Play Dice?* Oxford: Basil Blackwood, 1989.

Swinney, H. L. "Observations of Order and Chaos in Nonlinear Dynamics." *Physica D* 7(1983): 3－15.

Swinney, H. L., and J. P. Gollub, eds. *Hydrodynamic Instabilities and the Transition to Turbulence*. Berlin: Springer-Verlag, 1987.

Thompson, P. D. "A History of Numerical Weather Prediction in the United States." *Bull. Amer. Meteor. Soc.* 64(1983): 755－769.

Ueda, Y. "Strange Attractors and the Origin of Chaos." In *The Road to Chaos*, By Y. Ueda, pp. 185－216. Santa Cruz, CA: Aerial Press, 1992.

Ueda, Y. "Survey of Regular and Chaotic Phenomena in the Forced Duffing Oscillator." *Chaos, Solitons and Fractals*, 1(1991): 199－231.

van der Pol, B. "On 'Relaxation-Oscillations.'" *Phil. Magazine, 7th Ser.* 2(1926): 978－992.

von Neumann, *J. Theory of Self-Reproducing Automatal*. Edited by A. W. Burks. Urbana: University of Illinois Press, 1966.

Welander, P. "On the Oscillatory Instability of a Differentially Heated Fluid Loop." *J. Fluid Mech.* 29(1967): 17－30.

Wiener, N. "Nonlinear Prediction and Dynamics." *Proc. 3rd Berkeley Sympos. Math. Stat. and Prob.* (1956): 247－252.

Williams, R. F. "Lorenz Knots are Prime." *Ergodic Theor. and Dyn. Systems*, 4(1982): 147－163.

Wolfram, S. " Universality and Complexity in Cellular Automata." *Physica*, *D*10(1984): 1－35.

Zhang, S. -Y. *Bibliography on Chaos*. Singapore: World Scientific, 1991.

[General Information]
书名=混沌的本质
作者=（美）E.N.洛伦兹著　刘式达等译
页数=214
SS号=10347534
出版日期=1997年01月第1版